



قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۸% متوسط

①

تابع $f(x) = x|x+3|$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $f(b-a)$ کدام است؟

۶ (۴)

۶/۷۵ (۳)

۶/۵ (۲)

۶/۲۵ (۱)

گزینه های دام دار ۱ قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۹% متوسط

②

اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$ کدام است؟

[-۱, ۱] (۴)

(-۱, ۱) (۳)

 $R - (-۱, ۱)$ (۲) $R - [-۱, ۱]$ (۱)

دشوار قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۱۰% متوسط

③

تابع $f(x) = |\sin x|$ مفروض است. در کدامیک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟ $[0, \frac{\pi}{2}]$ (۴) $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (۳) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (۲) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (۱)

گزینه های دام دار ۳ قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۱% متوسط

④

اگر $f(x) = |x-1| - |x-3|$ باشد، در کدامیک از بازه‌های زیر وضعیت یکنوایی توابع f و f^2 یکسان است؟

[۰, ۲] (۲)

[۲, ۴] (۱)

 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ (۴)

[۱, ۳] (۳)

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۲۰% متوسط

⑤

در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq -1 \\ 2 & ; x < -1 \end{cases}$ ، اگر برای هر دو مقدار a و b در بازه $(-1, 0)$ داشته باشیم: $a < b$ ، آن‌گاه کدام مورد همواره صحیح است؟ $f(a^2) > f(b^2)$ (۲) $f(a) < f(b)$ (۱) $f(a) + f(b) > |a| + |b|$ (۴) $|f(a) - f(b)| < |a - b|$ (۳)

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ متوسط

⑥

کدام تابع در دامنه‌ی خود غیریکنواست؟

 $y = [-1 - x]$ (۴) $y = [2 + x]$ (۳) $y = x - [x]$ (۲) $y = x + [x]$ (۱)

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۴۳% ساده

⑦

نمودار تابع $f(x) = |x+2| - |x-3|$ در فاصله است.

(-۲, ۳)، اکیداً نزولی (۲)

(-۲, ۳)، اکیداً صعودی (۱)

(-۲, +∞)، اکیداً نزولی (۴)

(-۲, +∞)، اکیداً صعودی (۳)

قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۲۶% متوسط

⑧

تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است. دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱) ۲ ۲) ۵/۰ ۳) ۱ ۴) ۵/۱

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۳۱% ساده

اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۴۰% ساده

اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x - [x]$ آنگاه حاصل $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2(1 + \sqrt{2})$

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۹% متوسط

اگر $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x^2+1}$ و $f(x) = x+1$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ ۲) $-\frac{x^2}{x^2+x+1}$ ۳) $\frac{1}{x+1}$ ۴) $\frac{-x^2+x-1}{x^2+1}$

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۶% متوسط

اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$ و دامنه تابع $f \circ g$ دارای فقط ۲ عدد صحیح باشد، آنگاه حداقل مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه های دام دار ۴ قلمچی ۱۳۹۴ درصد پاسخگویی ۱۳% متوسط

تابع $f(x) = 4x - 3$ ، با دامنه $[-2, 1]$ مفروض است. اگر دامنه‌ی تابع $f \circ f$ بازه $[a, b]$ باشد، $b - a$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۳

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۱۱% متوسط

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = (x-1)^2$ حاصل می‌شود. در این صورت تابع $f \circ g$ محورها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

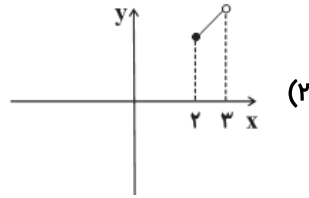
- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه های دام دار ۴ قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۵% دشوار

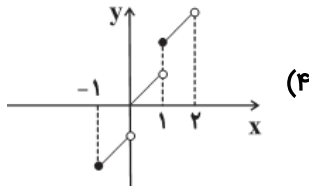
اگر $f + g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ و $f - g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$ آنگاه تعداد اعضای $f \circ g$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

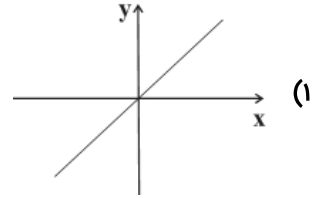
اگر $f^{-1}(x)$ وارون تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنه $D_f = [1, 2)$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



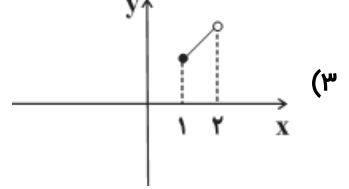
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ مفروض است. اگر نمودارهای توابع f و $f^{-1} + m$ همدیگر را قطع نکنند، حدود m کدام است؟

(۴) $m \geq 6$

(۳) $m \geq 4$

(۲) $m > 6$

(۱) $m > 4$

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محورهای قرینه کرده و سپس ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل در کدام فاصله بالای خط $y = x$ قرار می‌گیرد؟

(۴) $(-\infty, 2)$

(۳) $[0, 2]$

(۲) $[1, 2]$

(۱) $(-\infty, 1)$

کدام تابع یک به یک نیست؟

(۲) $y = 2^x - 3^{-x}$

(۴) $y = x^3 + x$

(۱) $y = \sqrt{x} + |x+2|$

(۳) $y = x^4 - x^2$

اگر تابع اکیداً صعودی $f(x) = \frac{mx-2}{3}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ ، نمودار تابع وارون خود را قطع کند، ضابطه تابع وارون کدام است؟

(۴) $y = \frac{5x+2}{3}$

(۳) $y = \frac{5x-2}{3}$

(۲) $y = \frac{3x-2}{5}$

(۱) $y = \frac{3x+2}{5}$

اگر $(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ و $f(x) = 3x-1$ باشد، حاصل $g(\frac{1}{3})$ کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{1}{3}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۹%

قلمچی ۱۳۹۵

۲۳

اگر $f^{-1} = \{(2, 3), (1, -1), (0, 2), (-1, 0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f^{-1}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

(۱) (۰, ۴)

(۲) (۰, -۱)

(۳) (-۴, ۰)

(۴) (-۱, ۰)

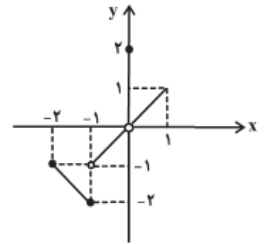
متوسط

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۶

۲۴

اگر $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد، در این صورت به ازای چه مقداری از a ، $f(g^{-1}(a)) = 1$ است؟



(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) صفر

دشوار

درصد پاسخگویی ۹%

قلمچی ۱۳۹۸

گزینه های دام دار ۲

۲۵

اگر $f(x) = 1 - 2x$ و $g(x) = ax - 1$ باشند، به ازای کدام مقدار a دو تابع $g(x)$ و $g(f(x))$ روی محور x ها متقاطع اند؟ ($a \neq 0$)

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) -۳

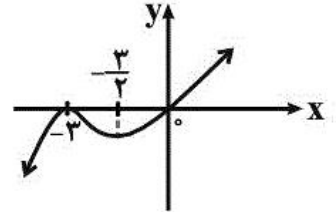
(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

گزینه «۳»

$$f(x) = x|x+3| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq -3 \\ -x^2 - 3x & x < -3 \end{cases}$$



همانطور که می‌بینید تابع در بازه $[-3, -\frac{3}{4}]$ نزولی است، بنابراین:

$$b - a = -\frac{3}{4} - (-3) = \frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \left| \frac{3}{4} + 3 \right| = \frac{39}{16} = 2.4375$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

y یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|2x-1|)$$

تابعی نزولی اکید است

$$\rightarrow |x-2| \leq |2x-1|$$

توان ۲

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

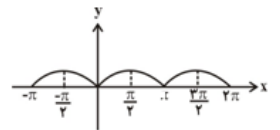
$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - (-1, 1)$$

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۰% | دشوار

تعریف $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ، نشان‌دهنده‌ی نزولی اکید بودن تابع f در بازه‌ی مورد نظر است. نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است:

با توجه به شکل و با توجه به گزینه‌ها، تابع در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیداً نزولی است.



پاسخ: گزینه ۱

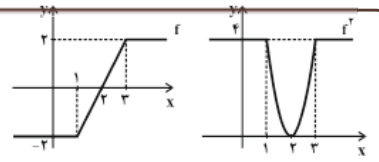
گزینه های دام دار ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۱% | متوسط

گزینه «۱»

$$f(x) = \begin{cases} -2 & ; x < 1 \\ 2(x-2) & ; 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & ; x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \begin{cases} 4 & ; x < 1 \\ 4(x-2)^2 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ 4 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

و نمودارهای f و f^2 به صورت زیر است:

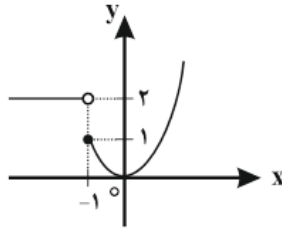


و با توجه به نمودارهای بالا، فقط در بازه $[2, 4]$ یکنوایی f و f^2 یکسان و صعودی می‌باشد.

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۲۰٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



بنابراین تابع در بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین داریم:

$$-1 < a < b < 0 \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{تابع اکیدا}} f(a) > f(b)$$

$$-1 < a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 \xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{تابع اکیدا}} f(a^2) > f(b^2)$$

لازم به ذکر است که رابطه گزینه «۳» به ازای همه مقادیر a و b در بازه $(-1, 0)$ برقرار نیست. همچنین با جای‌گذاری $f(a) = |a|^2$ ، $f(b) = |b|^2$ و استفاده از این نکته که $|a|^2 < |a|$ می‌باشد، نادرستی رابطه گزینه «۴» نیز به‌سادگی اثبات می‌شود.

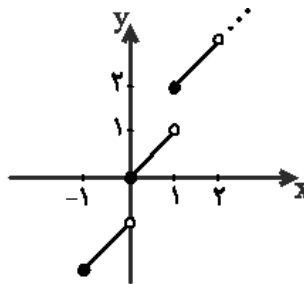
سؤالات کتاب آبی ۱۳۹۹ متوسط

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

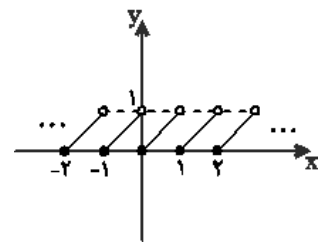
نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینه (۱):



صعودی است.

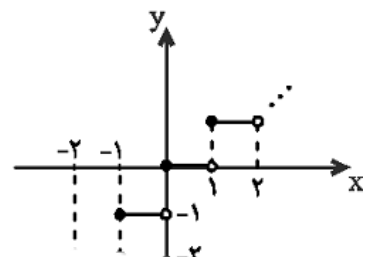
گزینه (۲):



نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

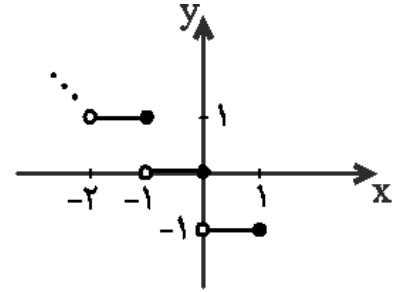
$$y = [x] + 2 \text{ : گزینه (۳)}$$

نمودار $y = [x]$ مطابق شکل زیر است:



صعودی است $y = |x| + 2 \Rightarrow$ صعودی است.

گزینه (۴): با قرینه کردن نمودار تابع $y = |x|$ نسبت به محور y ها، نمودار تابع $y = |-x|$ به دست می آید.



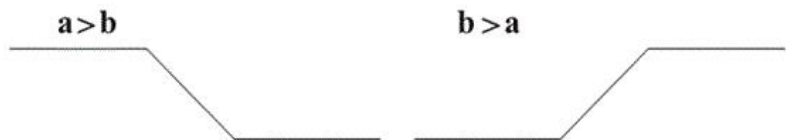
نزولی است $y = -1 + |-x| \Rightarrow$ نزولی است.

ساده درصد پاسخگویی ۴۳% قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

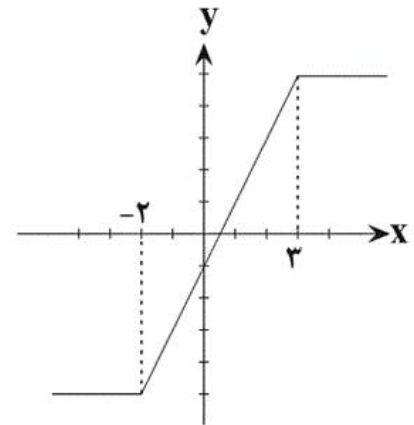
تابع $y = |x - a| - |x - b|$ را تابع آبشاری (سرسره) می گویند که نمودار آن به یکی از شکل های زیر است:



$$y = |x + 2| - |x - 3|$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -5$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$$

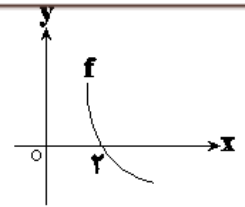


با توجه به نمودار، تابع در فاصله $(-2, 3)$ اکیداً صعودی است.

متوسط درصد پاسخگویی ۲۶% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



می‌دانیم $f(۲) = ۰$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$$\frac{x^2}{(x-1)f(x)} \geq ۰$$

x	0	1	2
x^2	+	0	+
$x-1$	-	-	0
$f(x)$	+	+	0
مبارت \emptyset	-	0	-

دامنه تعریف تابع $D_g = \{۰, ۱, ۲\}$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

متوسط خارج از کشور ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

روش اول:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x}$$

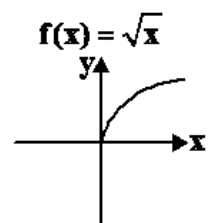
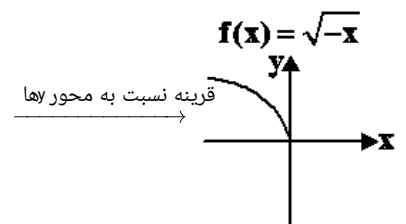
$$\xrightarrow{\text{انتقال } ۲ \text{ واحد به سمت } x \text{ ها مثبت}} y = \sqrt{-x+۲}$$

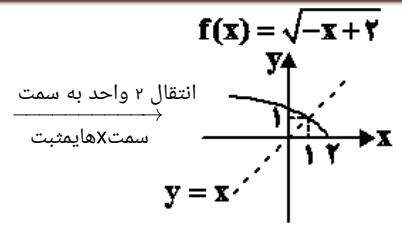
حال نقطه تلاقی نمودار حاصل را با نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{-x+۲} = x \xrightarrow{\text{به توان } ۲} -x+۲ = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{ق. ۱} \text{ ق. } x = ۱ \\ \text{ق. ۲} \text{ ق. } x = -۲ \end{cases}$$

روش دوم:





ساده درصد پاسخگویی ۳۱% قلمچی ۱۳۹۷

گزینه ۲: پاسخ

با توجه به ماشین مفروض سؤال، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \xrightarrow{2x} 2x \\ \Rightarrow g(f(x)) &= 2x \xrightarrow{g(x)=3x+F} 3f(x) + F = 2x \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2x-F}{3} \Rightarrow f(5) = 2 \end{aligned}$$

ساده درصد پاسخگویی ۴۰% قلمچی ۱۳۹۵

گزینه ۱: پاسخ

$$(f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(\sqrt{2} - [\sqrt{2}]) = f(\sqrt{2} - 1)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ داریم:

$$f(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۹% قلمچی ۱۳۹۸

گزینه ۴: پاسخ

$$f(g(x)) = g(x) + 1$$

$f(g(x))$ یعنی در تابع f به جای x ، عبارت $g(x)$ را قرار دهیم. چون $f(x) = x + 1$ است، پس داریم:

$$\underbrace{(f \circ g)(x)}_{f(g(x))} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow g(x) + 1 = \frac{x}{x^2+1}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x-x^2-1}{x^2+1}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۶% قلمچی ۱۳۹۸

گزینه ۲: پاسخ

$$D_f : x \geq 2 \quad , \quad D_g : x \neq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \neq 1 \mid \frac{x+a}{x-1} \geq 2\} \Rightarrow \frac{x+a-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x+2+a}{x-1} \geq 0$$

x	1	2+a	
	-	+	-
	-	+	
	-	+	

ت. ن

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (1, 2+a]$$

برای آن که $D_{f \circ g}$ دارای ۲ عدد صحیح باشد باید حداقل ۱ باشد. توجه کنید که چون $a > 0$ است، پس $1 < 2+a$.

متوسط درصد پاسخگویی ۱۳% قلمچی ۱۳۹۴ گزینه های دام دار ۴

گزینه ۲: پاسخ

از تعریف دامنه‌ی ترکیب توابع استفاده می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} \quad (*)$$

است، بنابراین:

$$f(x) = 4x - 3$$

$$\rightarrow D_{f \circ f} = \{x \in [-2, 1], -2 \leq 4x - 3 \leq 1\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], 1 \leq 4x \leq 4\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], \frac{1}{4} \leq x \leq 1\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = [\frac{1}{4}, 1]$$

$$\Rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۱% | قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا باید ضابطه‌ی $y = f(x)$ را بیابیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$g(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا رود}} y = (x-1)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}} f(x) = (x+1-1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

برای یافتن نقطه‌ی تلاقی تابع $f \circ g$ با محور y ها، $x = 0$ را در تابع قرار می‌دهیم:

$$f(g(0)) = f((0-1)^2) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

دشواری | درصد پاسخگویی ۵% | قلمچی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۴

پاسخ: گزینه ۱

می‌توان نوشت:

$$(f+g) + (f-g) = 2f = \{(1, 6), (2, 8), (3, 2), (4, 4)\}$$

$$(f+g) - (f-g) = 2g = \{(1, 4), (2, 0), (3, 2), (4, 2)\}$$

لذا:

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 1)\}$$

اما این فقط ظاهر قضیه است، $f+g$ و $f-g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شده است یعنی f و g به جز زوج‌های مرتب مشخص شده شاید زوج‌های مرتب دیگری را هم شامل باشند. یعنی f و g حداقل این ۴ زوج مرتب مشخص شده را دارند، در این حالت:

$$f \circ g = \{(1, 4), (3, 3), (4, 3)\}$$

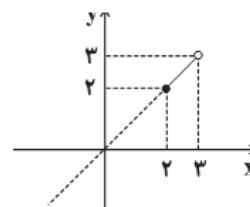
یعنی $f \circ g$ حداقل شامل ۳ زوج مرتب است، در نتیجه تعداد اعضای $f \circ g$ نمی‌تواند ۲ باشد.

دشواری | درصد پاسخگویی ۶% | قلمچی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۲

اگر $x \in [1, 2]$ باشد، آن‌گاه $f(x) = x + [x] = x + 1$ می‌شود.

می‌دانیم $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$ است و با توجه به نمودار $R_f = [2, 3]$ می‌شود. در نتیجه:



$$(f \circ f^{-1})(x) = x ; 2 \leq x < 3$$

نمودار حاصل گزینه «۲» است.

ساده | درصد پاسخگویی ۳۱% | قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

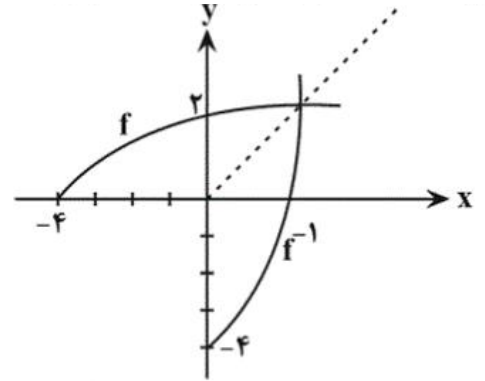
ابتدا ضابطه وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x+4}, \begin{cases} D_f = [-4, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x+4} \xrightarrow{\text{توان } 2} y^2 = x+4 \Rightarrow x = y^2 - 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y} y = f^{-1}(x) = x^2 - 4, D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

عوض میکنیم

حال نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $f^{-1}(x) = x^2 - 4$ را رسم می‌کنیم:با توجه به شکل برای این‌که نمودار دو تابع f و $f^{-1} + m$ همدیگر را قطع نکنند، باید نمودار f^{-1} بیش‌تر از 6 واحد به سمت بالا انتقال یابد یعنی $m > 6$.

ساده

درصد پاسخگویی ۳۵%

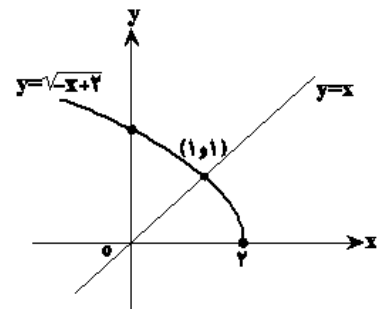
قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{دو واحد به سمت راست}} y = \sqrt{-x+2}$$

$$y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

مطابق شکل در فاصله $(-\infty, 1)$ نمودار $y = \sqrt{-x+2}$ بالای خط $y = x$ قرار می‌گیرد.

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵%

قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در گزینه «۱» هم \sqrt{x} و هم $|x+2|$ با شرط $(x \geq 0)$ اکیداً صعودی‌اند، پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی و یک به یک است.در گزینه «۲» 2^x و 3^{-x} اکیداً صعودی‌اند.در گزینه «۴» هم x و هم x^3 اکیداً صعودی‌اند.در گزینه «۳»، به ازای $x = 0$ و $x = \pm 1$ داریم: $y = 0$.

پاسخ: گزینه ۱

ساده قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۳۸%

اگر نمودار یک تابع اکیداً صعودی و وارونش، نقطه تلاقی داشته باشند، این نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) خواهد بود، زیرا تابع اکیداً صعودی و وارونش همواره نقطه تلاقی ندارند. پس در این نقطه خواهیم داشت: $f(x) = x \Rightarrow \frac{mx-2}{3} = x \xrightarrow{x=1} \frac{m-2}{3} = 1 \Rightarrow m = 5$

در نتیجه برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{5x-2}{3}$ داریم:

$$y = \frac{5x-2}{3} \rightarrow 3y + 2 = 5x \rightarrow x = \frac{3y+2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{5}$$

پاسخ: گزینه ۱

ساده قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۳۶%

گزینه «۱»

به کمک رابطه $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ می توان نوشت:

$$g \circ f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

برای محاسبه $g(\frac{1}{3})$ باید $f^{-1}(x)$ را برابر $\frac{1}{3}$ قرار دهیم یا به عبارتی مقدار $f(\frac{1}{3})$ مطلوب است. پس: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = f(\frac{1}{3})$

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{3}$$

$$g(\frac{1}{3}) = g(f^{-1}(0)) = \frac{2(0)+1}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۱۹%

ابتدا تابع f را می یابیم: $f = \{(3, 2), (-1, 1), (2, 0), (0, -1)\}$

دامنه ی تابع f^{-1} برابر است با:

$$D_{f^{-1}} = D_{f^{-1}} \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$= \{2, 1, 0, -1\} \cap \{3, -1, 2, 0\} - \{2\} = \{-1, 0\}$$

بنابراین:

$$x = 0: \frac{2f^{-1}(0)}{f(0)} = \frac{2(2)}{-1} = -4 \Rightarrow (0, -4) \in \frac{2f^{-1}}{f}$$

$$x = -1: \frac{2f^{-1}(-1)}{f(-1)} = \frac{2(0)}{1} = 0 \Rightarrow (-1, 0) \in \frac{2f^{-1}}{f}$$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۵%

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow (1, -2) \in f^{-1}$$

بنابراین نتیجه می گیریم $f(-2) = 1$ است. چون $f(g^{-1}(a)) = 1$ است در نتیجه، $g^{-1}(a) = -2$ بوده و از آن جا $a = g(-2)$ می شود و با توجه به نمودار $a = -1$ است.

پاسخ: گزینه ۴

دشوار قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۹% گزینه های دام دار ۲

ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$g(f(x)) = a(1-2x) - 1 = a - 2ax - 1$$

اکنون چون $g(f(x)) = 0$ و روی محور x ها متقاطع اند، پس طول نقطه تقاطع برابر با ریشه g و ریشه $g \circ f$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = 0 \Rightarrow a - 2ax - 1 = 0 \Rightarrow a - 1 = 2ax \Rightarrow \frac{a-1}{2a} \\ = x \\ g(x) = 0 \Rightarrow ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$a - 12a = \overset{a \neq 0}{\rightarrow} |aa - 12 = 1 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$



نام و نام خانوادگی:

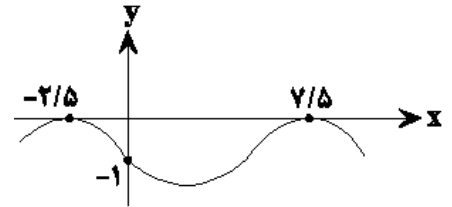
نام آزمون: ریاضی ۳ - فصل ۲ - زمان دار

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

①

نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos \pi(\frac{1}{p} - bx)$ است. حاصل ab کدام است؟

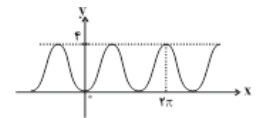


- (۱) $-\frac{1}{5}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{1}{15}$
- (۴) $-\frac{1}{15}$

قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۶۰% | ساده

②

شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می‌تواند باشد؟



$$y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 2 \quad (۲)$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \quad (۴)$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 2 \quad (۱)$$

$$y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 2 \quad (۳)$$

سراسری ۱۴۰۱ | متوسط

③

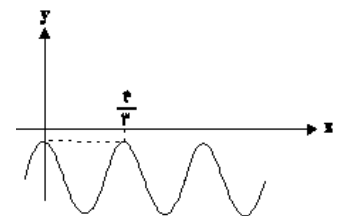
اگر $\cos^2 x + 2 \sin^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳% | متوسط

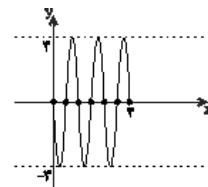
④

بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + \frac{1}{3} \cos \pi ax$ در شکل زیر رسم شده است. کمترین مقدار تابع کدام است؟



- (۱) $-\frac{7}{6}$
- (۲) $-\frac{11}{6}$
- (۳) $-\frac{1}{6}$
- (۴) $-\frac{1}{6}$

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. حاصل $a \cdot b$ کدام است؟



(۱) ۶-

(۲) -۳

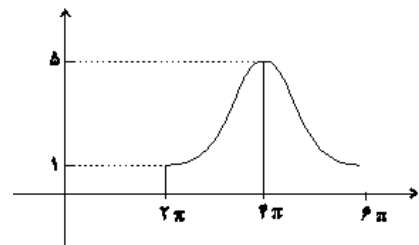
(۳) ۴/۵

(۴) ۶

برد تابع $f(x) = \frac{\tan x}{|\tan x|} + \tan x$ با دامنه $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} - \{0\}$ کدام است؟

(۲) R (۱) $R - \{0\}$ (۴) $R - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (۳) $R - [-1, 1]$

شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



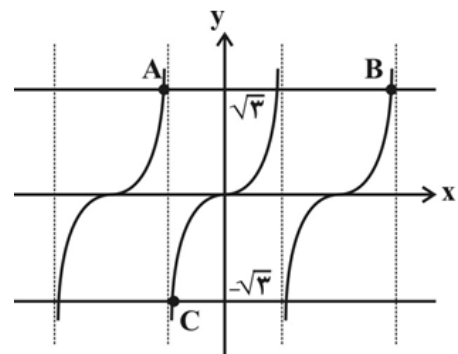
(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۱

شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $۸\sqrt{3}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



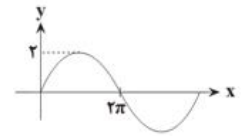
(۱) ۲/۳

(۲) ۳/۲

(۳) ۳/۴

(۴) ۳/۵

اگر نمودار $f(x) = a \sin bx$ به شکل زیر باشد، آن گاه ab کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۴
- (۴) ۱

۱۰

دوره تناوب نمودار تابع $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) π
- (۲) 2π
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

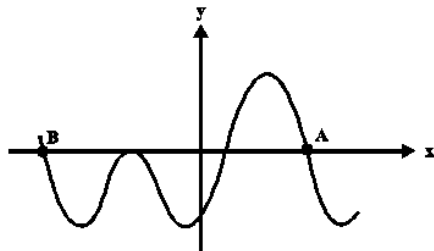
۱۱

حاصل عبارت $f(x) = \frac{\cos^2 x \cos^2 x}{\tan x + \cot x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sin x - \cos 2x$ در شکل زیر رسم شده است. طول پاره خط AB چند π است؟



- (۱) ۲
- (۲) $\frac{5}{3}$
- (۳) ۴
- (۴) $\frac{10}{3}$

۱۳

جواب کلی معادله $2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos^2 x + \sin(x + \frac{\pi}{4}) \sin x = -\frac{1}{4}$ ($k \in Z$) کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{8}$
- (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
- (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$
- (۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

۱۴

مجموع جوابهای معادله $\cos 2x = 3 \cos x - 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) $\frac{4\pi}{3}$
- (۳) $\frac{8\pi}{3}$
- (۴) 4π

معادله $\sin^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

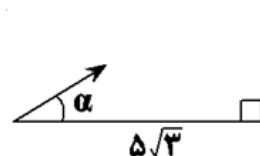
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصله $5\sqrt{3}$ متری از یک دیوار با سرعت $10 \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) برحسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10}$ به دست می‌آید. حدود α کدام باشد تا گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

جواب کلی معادله $\frac{1+\cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

تعداد جواب‌های معادله‌ی $\cos 2x - \cos x = \frac{1}{|x|+|-x|}$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (، []، نماد جز صحیح است.)

$$۵ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۳)$$

جواب کلی معادله‌ی $\frac{1+\cos x}{\cos \frac{x}{3}} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

گزینه «۲»

$$y = a + \cos\left(\frac{\pi}{\nu} - b\pi x\right) = a + \sin(b\pi x)$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a = -1$$

در عبور از $x = 0$ تابع نزولی است، پس $b < 0$ است:

$$T = \nu/\delta - (-\nu/\delta) = 10 = \frac{\nu\pi}{|b|\pi} \Rightarrow |b| = \frac{\nu}{\delta} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{\nu}{\delta}$$

$$ab = \frac{1}{\delta}$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۶۰% | ساده

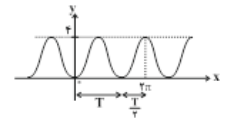
ضابطه مورد نظر می‌تواند $y = -a \cos bx + c$ باشد که $a > 0$ است.

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\nu} = \frac{4 - 0}{\nu} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{\nu} = \frac{4 + 0}{\nu} = 2$$

به علاوه با توجه به شکل، $T + \frac{T}{\nu} = 2\pi$ است، در نتیجه:

$$\frac{3T}{\nu} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi\nu}{3}$$



از طرفی می‌دانیم دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\nu\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi\nu}{3} = \frac{\nu\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{\nu}$$

چون نمودار تابع $y = \cos x$ نسبت به محورهای متقارن است، هر دو مقدار قابل قبول اند.

$$\Rightarrow y = -2 \cos\left(\frac{3}{\nu}x\right) + 2$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۱ | سراسری ۱۴۰۱ | متوسط

گزینه «۳»

تمام جملات را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{\nu} (1 + \tan^2 x) \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\nu}$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳% | متوسط

گزینه «۲»

دوره تناوب نمودار تابع برابر $\frac{4}{\nu}$ است، داریم:

$$T = \frac{\nu\pi}{|a|\pi} = \frac{\nu}{|a|} = \frac{4}{\nu} \Rightarrow |a| = \frac{3}{\nu}$$

چون نمودار کاملاً زیر محور x ها قرار دارد، مقدار منفی را می‌پذیریم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\nu} \cos \frac{3\pi x}{\nu} - \frac{3}{\nu}$$

بیشترین مقدار این تابع برابر $-\frac{2}{3}$ و کمترین مقدار آن $-\frac{11}{6}$ است.

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, 3]$ سه بار تکرار شده است، پس دوره تناوب آن $T = 1$ است، لذا:

$$\frac{2\pi}{|bT|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

از طرفی با دقت در نمودار تابع $y = \sin x$ دیده می‌شود که جای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع عوض شده است، پس a و b مختلف‌العلامت‌اند.

با فرض $a < 0$ و با توجه به اینکه ماکزیمم تابع برابر با $|a| = 3$ است، $a = -3$ و $b = 2$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow a \cdot b = -3 \times 2 = -6$$

توجه کنید که مقادیر $a = 3$ و $b = -2$ نیز قابل قبول‌اند.

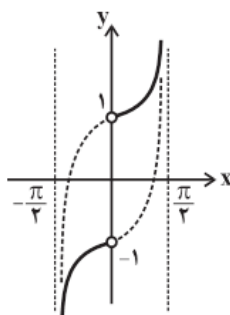
متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلمچی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌توانیم تابع f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \tan x - 1; & -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ \tan x + 1; & 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و برد آن به صورت $R - [-1, 1]$ است.



متوسط | سراسری ۱۴۰۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

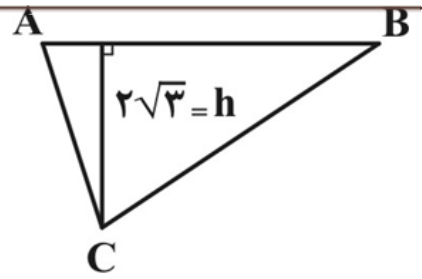
$$\left. \begin{matrix} \max = 4 \\ \min = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c - a = 1 \\ c + a = 5 \end{cases} \Rightarrow c = 3$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۳۱% | قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ارتفاع مثلث ABC ، $2\sqrt{3}$ است.



از طرفی A و B به اندازه ۲ برابر دوره تناوب با هم فاصله دارند:

$$AB = 2 \times \frac{\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل $a > 0$ است، پس داریم:

$$AB = \frac{2\pi}{a}$$

مساحت را حساب می‌کنیم و مساوی $8\sqrt{3}\pi$ قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{AB \times h}{2} \Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{\frac{2\pi}{a} \times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{2\sqrt{3}\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

ساده درصد پاسخگویی ۴۳% قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به آن‌که برد تابع سینوس دو برابر شده است $|a| = 2$ و همچنین داریم:

$$\frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

چون نمودار سینوس، پس از مبدأ صعودی است، پس $ab > 0$ داریم:

$$ab = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۷% قلم‌چی ۱۳۹۹ گزینه های دام دار ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۵% قلم‌چی ۱۳۹۹ گزینه های دام دار ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{می‌دانیم: } \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} \cos 2x \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} \cos 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x \cos 2x = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin 6x = \frac{1}{8} \sin 6x$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \sin \pi = \frac{1}{8}$$

دشوار درصد پاسخگویی ۹% قلم‌چی ۱۳۹۹ گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = \sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$$

طول نقاط A و B را از محل برخورد نمودار f با محور x که همان جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند، انتخاب می‌کنیم:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{باتغییرمتغیر}]{\text{معادله درجه دو}} \sin x = -1 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پس جواب‌های مثبت معادله مجموعه $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$ و جواب‌های منفی معادله مجموعه $\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \dots\}$ هستند. طول نقطه A دومین جواب مثبت یعنی $\frac{5\pi}{6}$ و طول B نیز دومین جواب منفی یعنی $-\frac{7\pi}{6}$ است.

$$\Rightarrow |AB| = \frac{5\pi}{6} - (-\frac{7\pi}{6}) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۰۰٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۲

$$2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos^2 x + \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -2\sin x \cos^2 x + \cos x \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x \cos x (2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; k \in Z$$

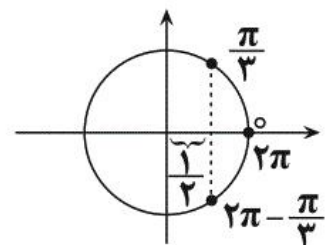
قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۰٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\cos 2x = 3\cos x - 2 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = 3\cos x - 2$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ مطابق دایره مثلثاتی عبارتند از:

$$\{0, \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با: 4π

$$\sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \sin x = 1$$

معادله $\sin x = 0$ در بازه داده شده ۳ جواب $0, \pi, 2\pi$ دارد.

معادله $\sin x = 1$ در این بازه یک جواب $x = \frac{\pi}{2}$ دارد.

بنابراین معادله داده شده در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

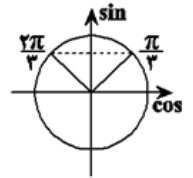
برای آن که گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگتر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم:

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=10} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از π تا $\frac{2\pi}{3}$ می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به‌ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



$$\frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} = \frac{\cos x(1 + 2 \cos x)}{\sin x(1 + 2 \cos x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \cot(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

گزینه ۴

در زوایای متمم داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \alpha \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

برای حل معادله موردنظر داریم:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow x = (2k + 1)\pi \end{cases}$$

با توجه به شرط موجود در سؤال، $x = (2k + 1)\pi$ غیرقابل قبول است.

تابع تعریف نشده: $x \in Z$

$$\Rightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ جواب است.

دشوار درصد پاسخگویی ۴% قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم، داریم:

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x(\sin x - \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ غ ق ق غ}, \sin x - \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin x - \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

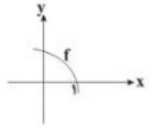
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 4k\pi + \pi \text{ غ ق ق} \end{cases}$$



متوسط درصد پاسخگویی ۲۷% قلمچی ۱۳۹۸

①

شکل روبرو نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) $-\infty$
(۳) $+\infty$
(۴) -1

دشوار درصد پاسخگویی ۸% قلمچی ۱۳۹۵

②

اگر حد $\lim_{x \rightarrow 0} (xf(x) - 1) = 2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{1}{x}}{f(x) - \frac{1}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{7}{4}$
(۴) حد وجود ندارد.

متوسط درصد پاسخگویی ۲۲% قلمچی ۱۳۹۶

③

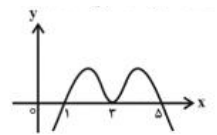
حد چپ تابع $f(x) = \frac{2x - |x+1|}{|x| - x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (، [،] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) -1
(۳) -2
(۴) صفر

متوسط درصد پاسخگویی ۲۷% قلمچی ۱۳۹۷ گزینه های دام دار ۲

④

نمودار تابع f به صورت شکل روبرو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) - f(x-4)}$ کدام است؟ (، [،] علامت جزء صحیح است.)



- (۱) $+\infty$
(۲) $-\infty$
(۳) ۱
(۴) -1

ساده درصد پاسخگویی ۳۶% قلمچی ۱۳۹۷

⑤

اگر چندجمله‌ای $f(x) = 3x^3 + ax^2 - bx + 6$ بر $(x+3)$ و $(x-1)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه حاصل $2a+b$ برابر کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۲۱
(۳) -5
(۴) ۱۷

متوسط درصد پاسخگویی ۱۴% قلمچی ۱۳۹۶ گزینه های دام دار ۳

⑥

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد.
(۲) ۴
(۳) -4
(۴) صفر

۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ (۱) ۲) $\frac{3}{2}$ (۲)

- ۳) ۲ (۳) ۴) ۱ (۴)

۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ (۱) ۲) $-\frac{1}{2}$ (۲)

- ۳) ۲ (۳) ۴) -۲ (۴)

۹) اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + fb}{2 - \sqrt{3x + 10}} = -4$ ، آن گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{3}$ (۱) ۳) $-\frac{1}{3}$ (۳)

- ۲) ۳ (۲) ۴) ۶ (۴)

۱۰) اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x^2 - fx + f}{x^2 + ax - 2} = -1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x^2 - fx + f}{x^2 + ax - 2}$ کدام است؟

- ۱) ۴ (۱) ۳) ۱ (۳)

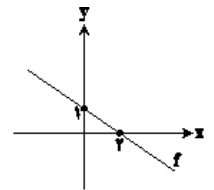
- ۲) -۴ (۲) ۴) -۱ (۴)

۱۱) حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} - 2^{n-1}}{2 \times 3^n + 9^{n-1}}$ کدام است؟

- ۱) ۳ (۱)

- ۳) $-\frac{1}{3}$ (۳)

۱۲) نمودار تابع خطی f به شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)+1}{f(3x)-x}$ کدام است؟



- ۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۴) $\frac{5}{2}$ (۴)

۱۳) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{n+1} - 2x^{n-1}}{4x^3 + x + 3} = -\frac{1}{2}$ ، حاصل $a + n$ کدام است؟

- ۱) صفر (۱)

- ۳) -۱ (۳)

- ۴) ۴ (۴)

۱۴) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^a + x^b + 1}{6x^b - 1} = -\frac{4}{3}$ ، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱) -۳ (۱) ۳) ۲ (۳)

- ۲) ۳ (۲) ۴) -۲ (۴)

ساده درصد پاسخگویی ۵۳% قلمچی ۱۴۰۰

متوسط درصد پاسخگویی ۱۲% قلمچی ۱۳۹۸ گزینه‌های دام دار ۴

متوسط درصد پاسخگویی ۱۵% قلمچی ۱۳۹۵

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸% قلمچی ۱۳۹۵

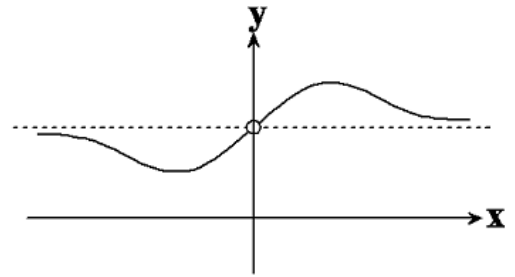
متوسط درصد پاسخگویی ۲۵% قلمچی ۱۳۹۹

متوسط درصد پاسخگویی ۲۰% قلمچی ۱۳۹۸

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸% قلمچی ۱۳۹۶

ساده درصد پاسخگویی ۳۶% قلمچی ۱۳۹۵

اگر نمودار زیر متعلق به تابع $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + ax + b}{x^2 + x}$ باشد، کدام $a-b$ است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

-۱ (۴)

اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ و $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{ax^n + 2}$ باشد، آن گاه $a+n$ کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

۳ (۴)

۱ (۳)

اگر $f(x) = \frac{|1-x^2|}{ax^2 + bx - 3}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ باشد، حد راست تابع f در $x = -1$ کدام می‌تواند باشد؟

-۲ (۴)

 $-\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

اگر $f(x) = \frac{6x^n - x^3 + 5}{-2x^n + 3x - 4}$ ، آنگاه با فرض این که n عددی طبیعی است، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام نمی‌تواند باشد؟

 $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۴)

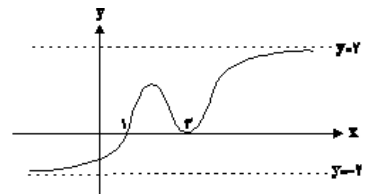
-۳ (۳)

حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-4x+1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{-2x-2} - \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۴)

-۲ (۳)

اگر $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x))$ کدام است؟



صفر (۱)

-۴ (۲)

۴ (۳)

-۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۷٪ متوسط

با توجه به نمودار تابع f ، وقتی با مقادیر کمتر از یک به عدد یک نزدیک می‌شویم، $f(x)$ با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. همچنین

داریم: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$ عددی مثبت

در نتیجه: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-1)}{f(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۸٪ دشوار

$\lim_{x \rightarrow 0} (xf(x) - 1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 3$

در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \frac{2}{x}}{f(x) - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xf(x)+2}{x}}{\frac{xf(x)-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)+2}{xf(x)-1} = \frac{3+2}{3-1} = \frac{5}{2}$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۲۲٪ متوسط

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - [x+1]}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{(-x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2x} = -1$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۲۷٪ متوسط گزینه های دام دار ۲

ابتدا باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x = 5$ به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) - f(x-6)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) - f(x-6)} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{|x|}}{f(x) - f(x-6)} = +\infty$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۳۶٪ ساده

اگر $f(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $f(a) = 0$ است. پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f(-3) = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \times (-3)^3 + a \times (-3)^2 - b(-3) + 6 = 0 \Rightarrow 9a + 3b = 75 \\ 3 + a - b + 6 = 0 \Rightarrow a - b = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 25 \\ a - b = -9 \end{cases} \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4 - b = -9 \Rightarrow b = 13$$

در نتیجه: $\Rightarrow 2a + b = 2 \times 4 + 13 = 21$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۴٪ متوسط گزینه های دام دار ۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+3)}{\sqrt{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+3)}{|x-1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x+3)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x+3)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-(x+3)) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+3)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+3)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4$$

چون حد راست و حد چپ عبارت $\frac{3-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ در $x=1$ با هم برابر نیستند، پس $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ وجود ندارد.

ساده درصد پاسخگویی ۵۳% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۲% قلمچی ۱۳۹۸ گزینه های دام دار ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 2x} = \sqrt{\cos^2 2x} = |\cos 2x|$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\frac{-\cos 2x}{\cos^2 x}}{|\cos 2x|} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۵% قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۲

هنگامیکه $x \rightarrow -2$ ، حد $2 - \sqrt{3x+10}$ برابر صفر است. چون حد تابع وقتی $x \rightarrow -2$ ، برابر عددی حقیقی و مخالف صفر است، پس قطعاً حد صورت نیز وقتی $x \rightarrow -2$ ، برابر صفر است. داریم:

$$a(-2) + 4b = 0 \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2bx+4b}{2-\sqrt{3x+10}} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2b(x+2)}{2-\sqrt{3x+10}} \times \frac{2+\sqrt{3x+10}}{2+\sqrt{3x+10}}$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2b(x+2)(2+\sqrt{3x+10})}{4-(3x+10)} = -4 \Rightarrow \frac{2b(4)}{4-(3x+10)} = -4 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a = 2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$$a+b = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸% قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۲

چون حاصل حد برابر عددی حقیقی و مخالف صفر است و حد صورت کسر $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ به ازای $x \rightarrow 1$ برابر صفر است، بنابراین حد مخرج کسر نیز به ازای $x \rightarrow 1$ ، می‌بایست برابر صفر باشد.

$$x^2 + ax - 2 = 0 \xrightarrow{x=1} (1)^2 + a(1) - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x-1) - 4(x-1)}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = -4$$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۵٪ متوسط

گزینه «۴»

در $+\infty$ حاصل 3^{n-2n} برابر $3^{-\infty} = 0$ است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 3^{n-2n}}{2 \times 3^n + 9^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 0}{2 \times 3^n + \frac{9^n}{9}}$$

در مخرج کسر از 9^n فاکتور می‌گیریم:

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 3^n}{9^n \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 9^n}{9^n \left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{2}{3^n} + \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{3}{0 + \frac{1}{9}} = 27$$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۰٪ متوسط

گزینه «۴»

ابتدا ضابطه f را می‌نوسیم. شیب خط f برابر $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$ است. پس:

$$f(x) = \frac{-1}{3}x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2f(x)+1}{f(3x)-x} = \frac{2\left(\frac{-1}{3}x+1\right)+1}{-\frac{1}{3}(3x)+1-x} = \frac{-x+3}{-\frac{5}{3}x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+3}{-\frac{5}{3}x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{-\frac{5}{3}x} = \frac{3}{5}$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۲۸٪ متوسط

چون $a \neq 0$ هست، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{n+1} - 2x^{n-1}}{Fx^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{n+1}}{Fx^2} = -\frac{1}{3}$$

چون حاصل حد برابر $-\frac{1}{3}$ است، بنابراین:

$$n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

$$\frac{a}{F} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow a+n = -2+2 = 0$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۳۶٪ ساده

چون جواب حد در بی‌نهایت، یک عدد حقیقی مخالف صفر است، پس درجه‌ی صورت و مخرج مساویند یعنی $b = 5$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^5 + x^2 + 1}{Fx^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^5 + x^2 + 1}{Fx^5 - 1} = -\frac{F}{3}$$

$$-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^5}{Fx^5} = -\frac{F}{3} \Rightarrow \frac{a}{F} = -\frac{F}{3} \Rightarrow a = -\frac{2F}{3} = -1$$

$$a + b = -\lambda + \delta = -\lambda$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۴% | قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تابع در $x=0$ دارای حد است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^2 + ax + b}{x^2 + x} = \frac{b}{0} \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + x^2 + ax}{x^2 + x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x^2 + ax}{x^2 + x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^2 + ax}{x^2 + x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x^2 + x + a)}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x + a}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{a}{1} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a - b = 2 - 0 = 2$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلمچی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۴

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا حد تابع را وقتی $x \rightarrow -\infty$ بررسی می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{ax^n + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(-x)}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{ax^n}$$

حاصل حد برابر با $-\frac{1}{a}$ شده است، پس توان‌های صورت و مخرج باید برابر باشند که از آنجا مقدار $n = 1$ به دست می‌آید.

تقسیم ضرایب x ‌های صورت و مخرج کسر بر هم، جواب حد را می‌دهد یعنی $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$ ، که نتیجه می‌دهد $a = -2$.

$$\Rightarrow a + n = -2 + 1 = -1$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۴% | قلمچی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|1 - x^2|}{ax^2 + bx - 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{ax^2 + bx - 3} = \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

حاصل عبارت صورت به ازای $x = -1$ برابر صفر است. اما از آنجایی که در گزینه‌ها مقدار صفر موجود نیست، پس حاصل عبارت مخرج نیز باید به ازای $x = -1$ صفر گردد. بنابراین داریم:

$$x^2 + bx - 3 \Big|_{x=-1} = 1 - b - 3 = -b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{|1 - x^2|}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1 - x^2}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1-x}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۴

اگر $n = 1$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - x^2 + 5}{-2x + 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = -\infty$$

اگر $n = 2$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - x^2 + 5}{-2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{-2x^2} =$$

$+\infty$

اگر $n = 3$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - x^2 + 5}{-2x^3 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{-2x^3} =$$

$-\frac{6}{2}$

اگر $n > 3$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^n}{-2x^n} = -3$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸% | قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۴

طبق هم‌ارزی پرتوان از توان‌های کوچکتر در مقابل توان‌های بزرگتر باید صرف‌نظر کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-4x+1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{-2x-2} - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-4x+1} + 1}{\sqrt{-2x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-4x}}{\sqrt{-2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-4x}{-2x}} = \sqrt{2}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۵% | قلمچی ۱۴۰۰ | گزینه‌های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

وقتی $x \rightarrow 3$ ، مقادیر تابع f با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$$

همچنین وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، مقادیر تابع f با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = 2 - (-2) = 4$$



نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی ۳ - فصل ۴ - زمان دار

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

گزینه های دام دار ۴ قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۴% متوسط

①

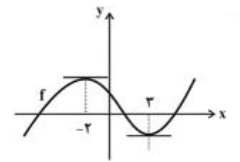
اگر $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\cos \pi x} [x - 3]$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h}$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.)

۴ (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

ساده قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۵۴% متوسط

②

نمودار تابع f به شکل زیر داده شده است. کدامیک از گزینه های زیر می تواند ضابطه تابع f' باشد؟



$f'(x) = x^2 + 2x - 6$ (۲)

$f'(x) = x^2 - x + 4$ (۱)

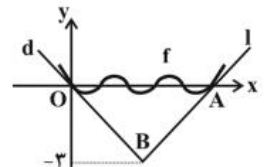
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ (۴)

$f'(x) = 2x^2 - 2x - 12$ (۳)

متوسط قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۲۳% متوسط

③

خط d و l بر نمودار تابع f در مبدأ مختصات و نقطه A مماس هستند. اگر $x_A = k$ و $-\frac{1}{4}f'(k) = f'(0) = -\frac{1}{4}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟



$\frac{15}{4}$ (۲)

$\frac{15}{2}$ (۱)

$\frac{45}{4}$ (۴)

$\frac{45}{2}$ (۳)

نسبتا دشوار خارج از کشور ۱۴۰۱

④

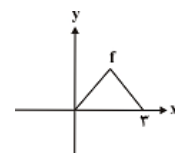
اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)}$ کدام است؟

۱ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)

ساده سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

⑤

باشد، نمودار تابع $y = -f(-x)$ در کدام ناحیه ی دستگاه مختصات قرار دارد؟



اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸% قلمچی ۱۳۹۵

۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x) - 4} = -2$ و $(1, 4) \in f$ باشد، $f'(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) ۱
(۴) -۱

ساده درصد پاسخگویی ۳۳% قلمچی ۱۳۹۴

۷ اگر $g(1) = g'(1) = 2$ و $f(x) = x^2 + x$ باشد، مشتق تابع $f \circ g$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۳۵

دشواری درصد پاسخگویی ۱۰% قلمچی ۱۳۹۹

۸ مشتق راست تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 - 1}}$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$
(۲) ۲
(۳) -۲
(۴) $\sqrt{2}$

متوسط خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

متوسط درصد پاسخگویی ۲۱% قلمچی ۱۴۰۰

۱۰ اگر $f(x) = \frac{x-k}{x-2}$ باشد، مشتق دوم تابع $y = f(x^2)$ در $x = \sqrt{3}$ برابر ۱۱ است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{4}{3}$

ساده درصد پاسخگویی ۴۵% قلمچی ۱۴۰۰

۱۱ اگر $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(16+h) - f(16)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{3}{16}$
(۳) $\frac{3}{8}$
(۴) ۸

متوسط درصد پاسخگویی ۱۹% قلمچی ۱۳۹۹

۱۲ اگر $f(0) = \frac{1}{3}(f'(0))^3 = f''(0) = g(0) = g'(0) = g''(0) = 2$ باشد، مشتق دوم تابع $\frac{f}{g}$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt[3]{4}$
(۲) ۸
(۳) $\sqrt[3]{4}$
(۴) $2 - \sqrt[3]{4}$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۷% قلمچی ۱۳۹۷

۱۳ اگر $f(x) = \sqrt{2x+3}$ باشد، حاصل $ff'' + (f')^2$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) $\frac{1}{2}$

ساده درصد پاسخگویی ۳۵% قلمچی ۱۴۰۰

۱۴ اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1; & x \geq 1 \\ 1 - x^2; & x < 1 \end{cases}$ باشد، مشتق تابع $(f \circ f)(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳۶
(۳) ۱۸
(۴) ۲۷

دشواری درصد پاسخگویی ۴% قلمچی ۱۳۹۸ گزینه های دام دار ۳

۱۵ نمودارهای توابع $f(x) = \frac{x}{x+k}$ و f' ، هیچ نقطه مشترکی ندارند. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟
 الف) اگر f اکیداً یکنوا باشد، آنگاه یک به یک است.
 ب) اگر f یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنواست.

(۱) هر دو (۲) فقط الف (۳) فقط ب (۴) هیچ کدام

گزینه های دام دار ۱-۲ (قلمچی ۱۳۹۵) درصد پاسخگویی ۸% دشوار

در تابع $f(x) = |(x-1)(x-3)|$ اختلاف آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله‌ی $[2, 4]$ با آهنگ آنی در $x = 2/5$ چه قدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۳۶% ساده

به ازای کدام مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = ax^2 + 3x - 1$ در فاصله‌ی $[1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x = 3$ برابر است؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۴۸% ساده

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t) = t - \sqrt{2t}$ از $t = 2$ تا $t = 8$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{3}{5}$

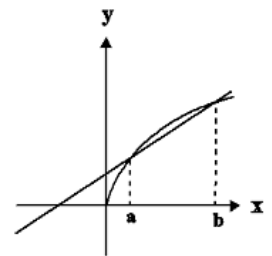
قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۴۸% ساده

آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x+1}$ نسبت به تغییر x در بازه $[0, 8]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۲۶% متوسط

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و خط $2y - x = \frac{1}{4}$ در شکل زیر رسم شده است. اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = m$ ، برابر آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[a, b]$ باشد، مقدار m کدام است؟



(۱) ۲

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) ۱

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۵% متوسط

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند برابر $\frac{1}{9}$ است، h کدام است؟

(۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۲۵% متوسط

اگر $P(t) = 3000 + 100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t (ساعت) باشد، آهنگ متوسط افزایش جمعیت در ۳ ساعت اول پس از زمان $t_0 = 2$ چه قدر از آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت در $t_1 = 3$ بیش تر است؟

(۱) صفر (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۴۰۰

ساده

درصد پاسخگویی ۳۴%

قلمچی ۱۳۹۹

۲۴

در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرفی پر از مایع ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $v(t) = 60(1 - \frac{t}{50})^2$ به دست آید ($0 \leq t \leq 50$)، آهنگ متوسط تغییر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف از ابتدا تا تخلیه کامل چه قدر است؟

(۲) $-1/5$ (۱) -1 (۴) $-1/8$ (۳) $-1/2$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۱%

قلمچی ۱۳۹۵

۲۵

حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به وسیله‌ی رابطه‌ی $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تغییر حجم آب این استخر در ۸ دقیقه‌ی اول کدام است؟

(۴) -4050 (۳) -5400 (۲) -5040 (۱) -5000

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -f'(2)$$

$$-f'(2) = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{\cos \pi x [x - 2] - 0}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{\cos \pi x} \frac{|2^- - 3|}{x-2} = -\left(\frac{4}{\cos 2\pi}\right)(-2) = 8$$

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۵۴% | ساده

با توجه به گزینه‌های داده شده ضابطه f' یک تابع درجه دوم به صورت $f'(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. از طرفی با توجه به نمودار f ، خطوط مماس بر نمودار تابع f در نقاط -2 و 3 افقی است، بنابراین $f'(-2) = f'(3) = 0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$f'(x) = a(x+2)(x-3) = a(x^2 - x - 6)$$

با قرار دادن $a = 2$ ، ضابطه تابع گزینه «۳» به دست می‌آید.

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

$$d \text{ معادله خط } y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$$

$$B \text{ طول نقطه } -3 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B = (6, -3)$$

$$m_1 = \frac{0 - (-3)}{k - 6} = f'(k) \Rightarrow \frac{3}{k - 6} = 2 \Rightarrow 2k - 12 = 3 \Rightarrow k = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{|x_A| |y_B|}{2} = \frac{\frac{15}{2} \times 3}{2} = \frac{45}{4}$$

پاسخ: گزینه ۲

خارج از کشور ۱۴۰۱ | نسبتا دشوار

گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} \xrightarrow{HOP} \frac{2f'(x)}{2} = f'(1)$$

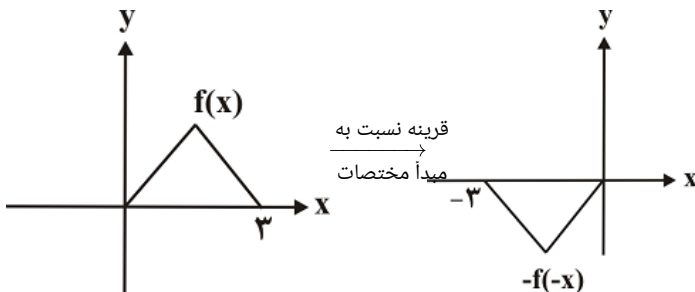
$$\Rightarrow \frac{1/5(2) - 1}{(2)^2} = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | ساده

گزینه ی «۳»

برای رسم نمودار تابع $y = -f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، بنابراین:



بنابراین نمودار تابع $y = -f(-x)$ در ناحیه ی سوم قرار دارد.

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{f(x)-F} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)-F}$$

$$= -1 \times \frac{1}{f'(1)} = -2 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

ساده درصد پاسخگویی ۳۳% قلمچی ۱۳۹۴

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$$

$$(f \circ g)'(x)$$

$$= g'(x)f'(g(x)) \xrightarrow{x=1} (f \circ g)'(1) = g'(1)f'(2) = 2 \times 5 = 10$$

دشوار درصد پاسخگویی ۱۰% قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f_+'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 - 1}} - 0}{x-1} \text{ ضرب صورت و مخرج در مزدوجصورت}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 - 1}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{2x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{2x^2 - 1}}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x^2 + 1}}{(x-1)\sqrt{2x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}{(x-1)(\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{(x-1)\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

دقت کنید که در همسایگی راست $x=1$ ، عبارت $x^2 - 1$ مقداری مثبت دارد.

متوسط خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}} = \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right)$$

$$f'(-2) = \frac{1}{3} \left(\frac{-8}{-1}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{(-6)(-1) - 3(-8)}{(-6+5)^2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (18) = 6$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۱% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2) \Rightarrow y'' = 2f'(x^2) + 2x^2 f''(x^2)$$

$$\Rightarrow y''(\sqrt{3}) = 2f'(3) + 12f''(3) (*)$$

حال مشتق‌های اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{k-2}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(3) = k-2 \\ f''(x) = \frac{-2(k-2)}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(3) = -2(k-2) \end{cases}$$

$$(*) \rightarrow 2f'(3) + 12f''(3) = 11 \Rightarrow 2(k-2) - 24(k-2) = 11$$

$$\Rightarrow k-2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

ساده درصد پاسخگویی ۴۵% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

رای محاسبه ضابطه مشتق تابع $f(x)$ ، ابتدا باید ضابطه تابع را به ساده‌ترین شکل برای مشتق‌گیری تبدیل کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

حاصل حد خواسته شده، برابر $f'(16)$ است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(16+h) - f(16)}{h} = f'(16) = \frac{3}{4\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{8}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۹٪ | قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$h = \frac{f}{g} \Rightarrow h' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\Rightarrow h'' = \frac{(f'g - g'f)'g^2 - (f'g - g'f)(g^2)'}{g^4}$$

$$= \frac{(f''g + f'g' - g''f - g'f')g^2 - (f'g - g'f)(2g g')}{g^4}$$

$$= \frac{(f''g - g''f)g + 2g'(f'g - f'g')}{g^3}$$

با جای‌گذاری مقادیر لازم داریم:

$$h''(0) = \frac{(2 \times 2 - 2 \times 2)2 + 2 \times 2(2 \times 2 - \sqrt{2} \times 2)}{8} = 2 - \sqrt{2}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۷٪ | قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۱

با ساده‌سازی و بررسی عبارت خواسته شده داریم:

$$ff'' + (f')^2 = (ff')' = (\sqrt{2x+3} \times \frac{2}{\sqrt{2x+3}})' = (1)' = 0$$

تذکر: توجه داشته باشید مشتق مرتبه دوم تابع f را با f'' نمایش می‌دهیم.

ساده | درصد پاسخگویی ۳۵٪ | قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$(f \circ f)'(1) = f'(1) \times f'(f(1))$$

$$\text{پس: } f(1) = 1^3 + 1 = 2$$

$$= f'(1) \times f'(2)$$

برای محاسبه $f'(1)$ و $f'(2)$ باید از ضابطه بالایی تابع استفاده کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3, f'(2) = 12$$

$$\Rightarrow (f \circ f)'(1) = 3 \times 12 = 36$$

دشوار | درصد پاسخگویی ۴٪ | قلمچی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x}{x+k} \Rightarrow f'(x) = \frac{k}{(x+k)^2}; D_f = D_{f'} = R - \{-k\}$$

معادله $f(x) = f'(x)$ نباید در دامنه‌هایشان جواب قابل قبول داشته باشد. داریم:

$$\frac{x}{x+k} = \frac{k}{(x+k)^2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -k} x(x+k)^2 - k(x+k) = 0 \Rightarrow (x+k)(x^2 + kx - k) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + kx - k = 0$$

برای اینکه شرط مسئله برقرار باشد، یعنی معادله فوق نباید جواب داشته باشد، کافی است Δ معادله فوق منفی باشد یا $x = -k$ جواب مضاعف آن باشد:

$$\begin{cases} \Delta = k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 & (1) \\ x = -k : k^2 - k^2 - k = -k = 0 \Rightarrow k = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in (-4, 0]$$

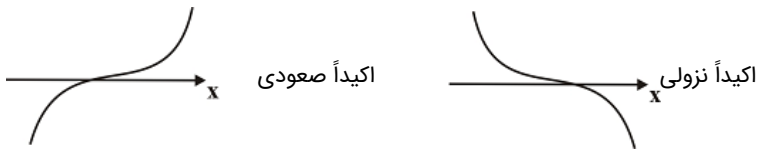
پس به ازای اعداد صحیح ۳، ۲، ۱ و صفر، نمودارهای f و f' نقطه برخورد نخواهند داشت.

سوال کتاب آبی ۱۳۹۹ ساده

پاسخ: گزینه ۲

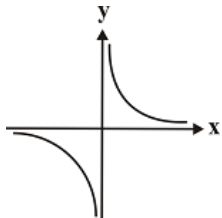
گزینه ی «۲»

الف) اگر تابع f اکیداً یکتوا باشد، یعنی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می توان نمودار آن را به صورت زیر در نظر گرفت:



از آنجاکه هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع f را (در هر دو حالت) حداکثر در یک نقطه قطع می کند، پس تابع f یک به یک است.

ب) تابع یک به یک زیر را در نظر بگیرید:



این تابع در بازه های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ نزولی است ولی در دامنه ی خود یعنی $\mathbb{R} - \{0\}$ ، غیریکنواست.

پس فقط مورد الف) همواره درست است.

گزینه های دام دار ۱-۲ قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۸% دشوار

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

ضابطه تابع در فاصله $[1, 3]$ به صورت $-(x-1)(x-3)$ است:

$$f(x) = -(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f'(x) = -(2x - 4)$$

$$\Rightarrow f'(2/5) = -(2 \times (2/5) - 4) = -1$$

پس اختلاف آن ها می شود: $1 - (-1) = 2$

قلمچی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۳۶% ساده

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(9a+9-1) - (a+3-1)}{3-1}$$

$$= \frac{8a+6}{2} = 4a+3$$

$$x = x_0. \text{ آهنگ لحظه ای: } f'(x_0) = (2ax_0 + 3)|_{x_0=3} = 6a+3$$

$$6a+3 = 4a+3 \Rightarrow a=0$$

پاسخ: گزینه ۲

آهنگ متوسط تغییر تابع f از $t = a$ تا $t = b$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(\lambda)-f(\gamma)}{\lambda-\gamma} = \frac{(\lambda-4)-(\gamma-2)}{\lambda-\gamma} = \frac{4-\gamma}{\lambda-\gamma} = \frac{\gamma}{\lambda}$$

ساده درصد پاسخگویی ۴۸% قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} f(\lambda) = \sqrt{9} = 3 \\ f(\gamma) = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(\lambda)-f(\gamma)}{\lambda-\gamma} = \frac{3-1}{\lambda-\gamma} = \frac{2}{\lambda-\gamma}$$

ساده درصد پاسخگویی ۴۸% قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

آهنگ متوسط تغییر تابع f در $[a, b]$ برابر شیب خط قاطع گذرنده از دو نقطه $x = a$ و $x = b$ که همان شیب خط $y - x = \frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{2}$ است:

$$\text{آهنگ متوسط} = \text{شیب خط} = \frac{1}{2}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = m$ برابر $f'(m)$ است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(m) = \frac{1}{2\sqrt{m}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۵% قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } 2 \text{ تا } 2+h = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}$$

$$= \frac{(2+h+\frac{1}{2+h})-(2+\frac{1}{2})}{h} = \frac{\Delta}{h}$$

$$\Rightarrow 2+h+\frac{1}{2+h}-\frac{5}{4} = \frac{\Delta}{h} \Rightarrow h+\frac{1}{2+h}-\frac{1}{4} = \frac{\Delta}{h}$$

$$\Rightarrow 9h+\frac{9}{2+h}-\frac{9}{4} = \Delta h \Rightarrow h = \frac{\Delta}{9}, h = 0 \text{ (غ ق ق)}$$

$$\Rightarrow h = 2/5$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۵% قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۲

باید آهنگ متوسط تابع را در فاصله $[2, 2+3]$ محاسبه کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{P(5)-P(2)}{5-2} = \frac{3000+100(5)^2-(3000+100(2)^2)}{3}$$

$$= \frac{100(21)}{3} = 700$$

برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تابع در $t = 3$ باید $P'(3)$ را محاسبه کنیم:

$$P'(t) = 0 + 200t \Rightarrow P'(3) = 600$$

پس آهنگ متوسط ۱۰۰ واحد از آهنگ لحظه‌ای بیش‌تر است.

ساده درصد پاسخگویی ۳۴% قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$v(t) = 0 \Rightarrow 60 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^4 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{t}{50} = 0 \Rightarrow t = 50$$

حال آهنگ متوسط تخلیه مایع را در بازه $[0, 50]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{v(50) - v(0)}{50 - 0} = \frac{0 - 60}{50} = \frac{-6}{5} = -1.2$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۱٪

قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه‌ی آهنگ متوسط تغییر حجم نسبت به زمان در بازه‌ی $[t_1, t_2]$ از رابطه‌ی $\frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{V(8) - V(0)}{8 - 0} \\ &= \frac{120(2500 - 300 + 64) - 120(2500 - 0 + 0)}{8} = \frac{120(-336)}{8} = -5040 \end{aligned}$$



متوسط کنکور سراسری ۱۳۹۹

①

فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

۲√۲ (۴)

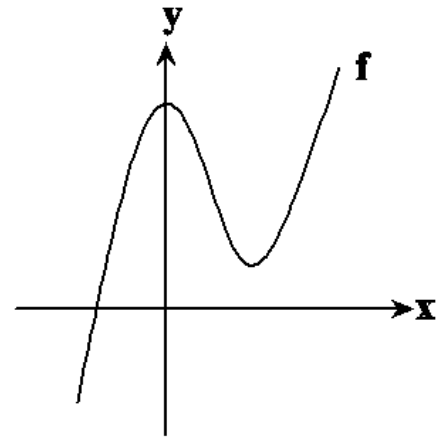
۲ (۳)

√۲ (۲)

۱ (۱)

متوسط قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۸%

②

اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

متوسط قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۸%

③

اگر نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ باشد، طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر آن کدام است؟ماکزیمم $-\frac{5}{3}$ ، (۴)ماکزیمم $\frac{5}{3}$ ، (۳)مینیمم $-\frac{5}{3}$ ، (۲)مینیمم $\frac{5}{3}$ ، (۱)

ساده قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۳۵%

④

تابع $f(x) = |x^2 - x|$ ، دارای ... مینیمم نسبی و ... ماکزیمم نسبی می‌باشد. (به ترتیب از راست به چپ)

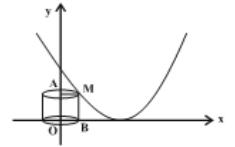
۲ و ۲ (۴)

۱ و ۲ (۳)

۲ و ۱ (۲)

۱ و ۱ (۱)

با توجه به شکل مقابل، روی منحنی $f(x) = (x-4)^2$ نقطه M را مشخص می‌کنیم. مستطیل OAMB را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم بزرگ‌ترین استوانه ایجاد شده کدام است؟



- (۱) 64π (۲) 32π
(۳) 16π (۴) 8π

قدر مطلق تفاضل ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $y = x\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

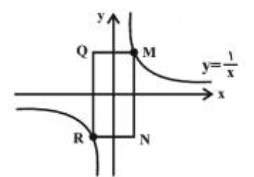
اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح k، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2; x \in (-1, 3)$ با کم‌ترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

مطابق شکل زیر، دو راس مقابل مستطیل MNRQ روی دو شاخه منحنی $y = \frac{1}{x}$ واقع اند و اضلاع مستطیل با محورهای مختصات موازی است. کم‌ترین مقدار محیط مستطیل کدام است؟ (نقطه‌های R و M نسبت به مبدا مختصات قرینه اند.)



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

با ۴۰ متر سیم می‌خواهیم دور یک زمین به شکل قطاع یک دایره را محصور کنیم. شعاع دایره کدام باشد تا مساحت زمین بیشترین مقدار ممکن باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۱

در ساخت قوطی‌های حلبی درواز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۲

۱۲

فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

$4\sqrt{5}$ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

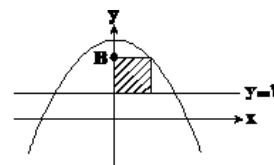
متوسط

درصد پاسخگویی ۲۶%

قلمچی ۱۴۰۰

۱۳

مطابق شکل زیر، دو ضلع مستطیل هاشورخورده روی خطوط $y = 1$ و $x = 0$ و یک رأس مستطیل روی سهمی $y = 7 - x^2$ است. اگر مساحت این مستطیل ماکزیم مقدار ممکن باشد، عرض نقطه B کدام است؟



۶ (۱)

۵ (۲)

$4/5$ (۳)

۱ (۴)

نسبتا دشوار

کنکور سراسری ۱۳۹۹

۱۴

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ (۴)

$\frac{3}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{1}$ (۲)

$\frac{2}{1}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۱%

قلمچی ۱۳۹۸

۱۵

بیش‌ترین مساحت ممکن در بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن منطبق بر محور x ‌ها و دو رأس دیگر آن بر روی منحنی تابع $y = 9 - x^2$ قرار دارد، کدام است؟

$18\sqrt{3}$ (۴)

$24\sqrt{3}$ (۳)

$12\sqrt{3}$ (۲)

$6\sqrt{3}$ (۱)

متوسط

خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

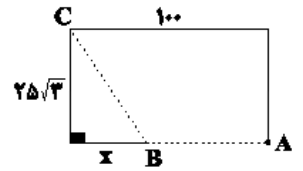
۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

علی در موقعیت A قرار دارد. او می‌خواهد به مغازه‌ای که در ۱۰۰ متری غرب و $۲۵\sqrt{۳}$ متری شمال موقعیت فعلی او قرار دارد برود. اگر مسیر AB را با سرعت $۴\frac{m}{s}$ و مسیر BC را با سرعت $۲\frac{m}{s}$ طی کند، آن‌گاه کم‌ترین زمان ممکن برای رسیدن به مغازه در نقطه C کدام است؟



(۲) $\frac{۷۵}{۴}$

(۴) $\frac{۱۷۵}{۴}$

(۱) ۲۵

(۳) $\frac{۱۷۵}{۴}$

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi = ۳$)

(۴) ۸

(۳) ۱۵

(۲) ۲۰

(۱) ۱۰

مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x - ۴|$ در بازه $[-۱, ۳]$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) -۶

(۲) -۵

(۱) -۴

حداکثر محیط مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر $۳\sqrt{۲}$ کدام است؟

(۴) $۳ + ۲\sqrt{۲}$

(۳) $۳(۱ + \sqrt{۲})$

(۲) $۳(۲ + \sqrt{۲})$

(۱) ۶

$$= \frac{\sqrt{4x-x^2} + 2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 0$$

$$f(x) = x + \sqrt{4x-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 1$$

$$+ \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2 \xrightarrow{x>2} 4x-x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2$$

$$-4x+4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \text{ ق ق} \\ x = 2 + \sqrt{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

با جایگذاری $x = 2 + \sqrt{2}$ ، عرض نقطه را به دست می آوریم:

$$f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{(4 + 4\sqrt{2}) - (4 + 2 + 4\sqrt{2})} = 2$$

$$: 2\sqrt{2}$$

حال فاصله نقطه $(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ را از خط $y - x = 0$ به دست می آوریم:

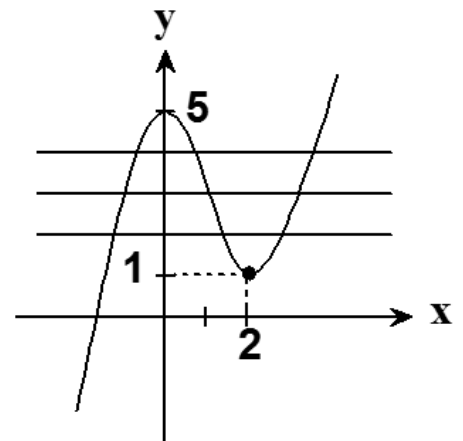
$$d = \frac{|2 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1$$

خط $y = k$ باید در محدوده بین ماکزیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$ را هم به دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادله اصلی $f(x)$ به دست می آوریم:

$$f(0) = 5, f(2) = 1 \xrightarrow{\text{نمودار}}$$



همانطور که می بینید به ازای سه مقدار صحیح $(k = 2, 3, 4)$ ، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

نقطه $A(1, 2)$ ، اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ است، پس:

$$\begin{cases} f(1) = 1 + b + c = 2 \Rightarrow b + c = 1 \quad (1) \\ f'(1) = 3x^2 + 2bx + c|_{x=1} = 3 + 2b + c = 0 \\ 2b + c = -3 \quad (2) \end{cases}$$

(۱) (۲)
 $\rightarrow b = -4, c = 5$

پس f' به صورت $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ خواهد بود که صفرهای آن 1 و $\frac{5}{3}$ است. داریم:

		۱		$\frac{5}{3}$	
f'	+	○	-	○	+
f		↗		↘	

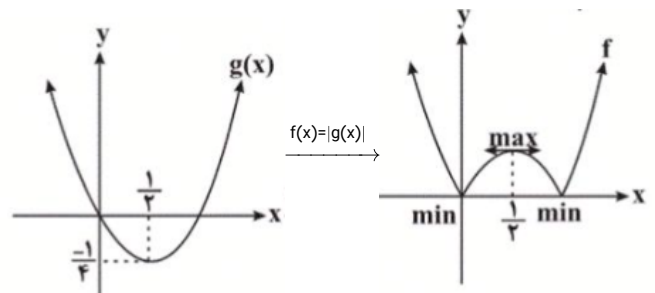
بنابراین طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر تابع f به ترتیب $x = \frac{5}{3}$ و مینیمم است.

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۳۵% ساده

پاسخ: گزینه ۳

$$g(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

با رسم نمودار f مشخص می‌شود که تابع f در $x = 0$ و $x = 1$ دارای مینیمم نسبی و در $x = \frac{1}{2}$ دارای ماکزیمم نسبی است.



قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۵% دشوار

پاسخ: گزینه ۳

نقطه M به مختصات $(x, (x-4)^2)$ را در نظر می‌گیریم:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi x^2 (x-4)^2 = \pi (4x - x^2)^2$$

$$\Rightarrow V' = 2\pi(4x - x^2)(4 - 2x) = 0$$

جواب‌های $V' = 0$ برابر 0 ، 4 و 2 است که 0 و 4 قابل قبول نیست. (زیرا در این دو حالت حجم صفر می‌شود).

$$\Rightarrow V = \pi x^2 (4-x)^2 \xrightarrow{x=2} V = 16\pi$$

قلمچی ۱۳۹۴ درصد پاسخگویی ۱۰% دشوار

پاسخ: گزینه ۴

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_y = [-2, 2]$$

$$y' = \sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow y' = \frac{4-x^2+(-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$\text{قدر مطلق تفاضل بیشترین و کمترین مقدار} = |2 - (-2)| = 4$$

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۲% متوسط

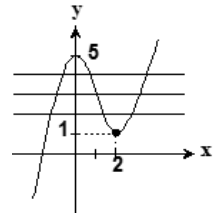
پاسخ: گزینه ۳

خط $y = k$ باید بین ماکزیمم و مینیمم نسبی قرار گیرد. پس لازم است عرض نقاط اکسترمم $f(x)$ را به دست بیاوریم. $f(x)$ مشتق پذیر است. مشتق تابع $f(x)$ را به دست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال عرض نقاط اکسترمم را با جایگذاری در معادله اصلی $f(x)$ به دست می آوریم:

$$f(0) = 5, f(2) = 1 \xrightarrow{\text{نمودار}}$$



همانطور که می بینید به ازای سه مقدار صحیح $(k = 2, 3, 4)$ ، معادله $f(x) = k$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

متوسط درصد پاسخگویی ۲۲% قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$$

شیب خط مماس همان مشتق تابع است. پس برای کمترین شیب باید مینیمم $f'(x)$ را پیدا کنیم.

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

$$= 6(2x^2 - x - 1)$$

$$= 6(2x+1)(x-1)$$

x	$-\frac{1}{2}$	1			
f''	+	-	+		
f'	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

پس برای $x \in (-1, 3)$ ، در $x = 1$ ، کمترین شیب ممکن به دست می آید:

$$f'(1) = 4 - 3 - 6 = -5$$

$$f(1) = 1 - 1 - 3 = -3$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - (-3) = -5(x - 1)$$

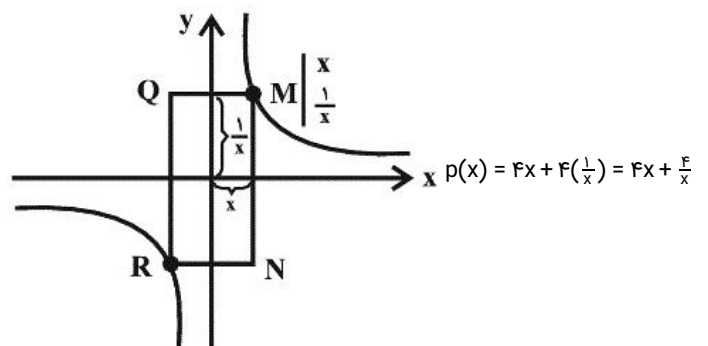
$$\Rightarrow y = -5x + 2$$

$$2 = \text{عرض از مبدا} \Rightarrow$$

دشوار درصد پاسخگویی ۹% قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۴

ب توجه به شکل، محیط مستطیل برابر است با:



$$p(x) = 4 + \frac{4}{x^2} = 0$$

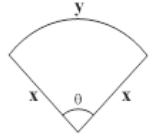
$$\Rightarrow \frac{4x^2 - 4}{x^2} = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

بنابراین، کمترین مقدار محیط برابر است با:

$$p(1) = 4 + \frac{4}{1} = 8$$

دشوار درصد پاسخگویی ۷٪ قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲



مطابق شکل داریم:

$$2x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - 2x$$

مساحت قطاعی با زاویه θ رادیان از دایره‌ای به شعاع r برابر است با $\frac{1}{2}\theta r^2$. بنابراین داریم: $\frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}xy$

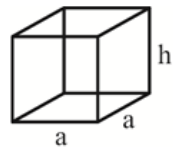
$$= \frac{1}{2}x(40 - 2x) = -x^2 + 20x$$

رأس سهمی $S(x)$ نقطه $(10, 100)$ است؛ یعنی به ازای شعاع $x = 10$ ، مساحت قطاع حداکثر مقدار ممکن خواهد بود.

متوسط خارج از کشور ۱۴۰۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



$$V = a^2 h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$$

$$S = a^2 + 4ah = a^2 + \frac{16}{a}$$

$$S' = 2a - \frac{16}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2a = \frac{16}{a^2} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$h = 1$$

$$S = a^2 + 4ah = 4 + 4 \times 2 \times 1 = 12$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۵٪ قلمچی ۱۳۹۹ گزینه های دام دار ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

همچنین فاصله نقطه M از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ است، بنابراین:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

بزرگترین وتر یک دایره برابر قطر دایره است.

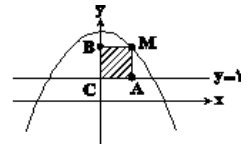
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4(-15)}$$

$$2R = \sqrt{16} = 4\sqrt{5}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



رأس مستطیل را که روی سهمی قرار دارد، M می‌نامیم:

پس مختصات نقطه M به صورت $(x, y - x^2)$ است و نقطه B برابر با عرض نقطه M است.

$$S = CA \times CB = x \times (y - x^2 - 1), x > 0$$

$$\Rightarrow S = x(6 - x^2) = 6x - x^3 \Rightarrow S' = 6 - 3x^2 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{2}$$

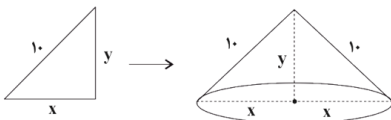
$$\Rightarrow y_B = 7 - (\sqrt{2})^2 = 5$$

نسبتا دشوار | کنکور سراسری ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم آن، مخروطی همانند شکل زیر به وجود می‌آید:



حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y \quad (*)$$

در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*)} V = \frac{1}{3} \pi (100 - y^2) y = \frac{\pi}{3} (100y - y^3)$$

$$\xrightarrow{V'=0} V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

مقدار x برابر است با:

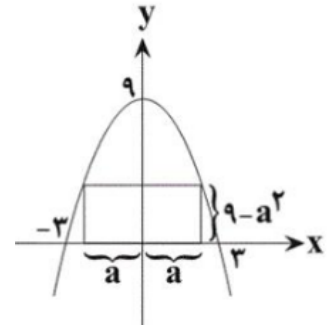
$$\xrightarrow{(**)} x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۱% | قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا سعی می‌کنیم نمودار تابع $y = 9 - x^2$ را رسم کنیم:



$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

مساحت مستطیل: $S = 2a \times (9 - a^2) = 18a - 2a^3$

حال به کمک S' ، نقطه بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow S'(a) = 18 - 6a^2 = 0 \Rightarrow 6a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

a	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
S'	-	+
S	\searrow	\nearrow

پس بیش‌ترین مقدار مساحت زمانی است که $a = \sqrt{3}$ باشد.

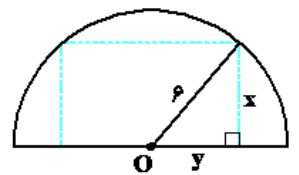
$$\Rightarrow S(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

متوسط خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

شکل مسئله به صورت زیر است:



راه حل اول: عرض مستطیل x و طول آن $2y$ است پس:

$$S = 2xy$$

طبق قضیه فیثاغورس رابطه بین x و y به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

تابع مساحت مستطیل را برحسب x بازنویسی می‌کنیم و از آن مشتق گرفته و نقطه بحرانی آن را می‌یابیم:

$$S(x) = 2x\sqrt{36 - x^2} \Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{(-2x) \times 2x}{2\sqrt{36 - x^2}}$$

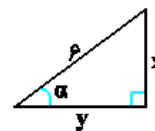
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} = \frac{4x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{36 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

پس به ازای $x = 3\sqrt{2}$ مستطیل بیشترین مساحت را دارد.

$$S(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \times \sqrt{18} = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36$$

راه حل دوم: در مثلث قائم‌الزاویه زیر x و y را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α بدست می‌آوریم:



$$\sin \alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6 \cos \alpha$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2xy = 2 \times 6 \sin \alpha \times 6 \cos \alpha = 36 \sin 2\alpha$$

مساحت وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\sin 2\alpha = 1$ باشد.

پاسخ: گزینه ۴

دشوار درصد پاسخگویی ۶% قلمچی ۱۳۹۸

گزینه «۴»

$$AB \text{ مسیر} = t_1 = \frac{100-x}{6} \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$BC \text{ مسیر} = t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2}}{2}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 = \frac{100-x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2}}{2}$$

$$\Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2}}$$

$$t' = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2} \Rightarrow x^2 = (25)^2 \xrightarrow{x>0} x = 25$$

$$t_{\text{کل}} = \frac{25}{6} + 25 = \frac{175}{6}$$

پاسخ: گزینه ۱

دشوار درصد پاسخگویی ۳% قلمچی ۱۳۹۸ گزینه های دام دار ۳

گزینه «۱»

با توجه به حجم قوطی، رابطه بین ارتفاع و شعاع استوانه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = 3000 \xrightarrow{\pi=3} r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{r^2}$$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانه موردنظر کمترین مقدار ممکن گردد.

$$S = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت قاعده} = \text{مساحت کل استوانه} = 2\pi r h + \pi r^2$$

با جایگذاری ارتفاع برحسب شعاع، داریم:

$$S = 2\pi r^2 + \pi \left(\frac{1000}{r}\right) = \pi \left(r^2 + \frac{1000}{r}\right)$$

اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به دست می‌آید:

$$S' = \pi \left(2r - \frac{1000}{r^2}\right) = 0$$

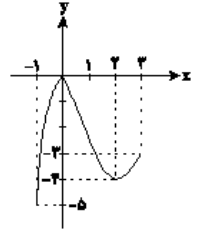
$$\Rightarrow 2r = \frac{1000}{r^2} \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow h = 10$$

پاسخ: گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۵۱% قلمچی ۱۳۹۹

ابتدا ضابطه تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$y = (x - 4)|x| = \begin{cases} x^2 - 4x & ; x \geq 0 \\ 4x - x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

حال نمودار تابع را در بازه $[-1, 3]$ رسم می‌کنیم:

همان‌طور که مشخص است، کم‌ترین مقدار تابع برابر ۵- است.

پاسخ: گزینه ۲

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸% قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

اضلاع مثلث را x و y در نظر می‌گیریم:

$$P = x + y + 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow y = \sqrt{18 - x^2}$$

$$P = x + \sqrt{18 - x^2} + 3\sqrt{2} \Rightarrow P' = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{18 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x}{\sqrt{18 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{18 - x^2} = x \Rightarrow 18 - x^2 = x^2 \xrightarrow{x > 0}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P = 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 3(2 + \sqrt{2})$$



گزینه های دام دار ۳ قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۸% متوسط

①

اگر سطح مقطع یک استوانه با صفحه های افقی، عمودی و صفحه ای مایلی که از قاعده های استوانه عبور نکند، برخورد کند، کدام شکل حاصل نمی شود؟

(۱) بیضی (۲) سهمی (۳) مستطیل (۴) دایره

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ متوسط

②

صفحه ای در برخورد با کره ای به شعاع R بیشترین سطح مقطع ممکن را ایجاد کرده است. این صفحه را در راستای عمود بر صفحه چقدر جابه جا کنیم تا سطح مقطع حاصل نصف شود؟

(۱) $\frac{R}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}R}{2}$ (۳) $\frac{R}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}R}{3}$

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۱۷% متوسط

③

بیضی به کانون های (۱, ۱) و (۱, -۱) و خروج از مرکز e مفروض است. به ازای کدام مقدار e بیضی بر محور yها مماس می شود؟

(۱) $e = \frac{1}{2}$ (۲) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $e = \frac{1}{3}$ (۴) $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ متوسط

④

دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند و به ترتیب از خط d به فاصله $\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ هستند و امتداد AB با d زاویه 30° می سازد. AB را حول d دوران داده و شکل حاصل را با صفحه ای شامل خط d برش می دهیم. سطح مقطع حاصل چقدر خواهد بود؟(۱) ۱۵ (۲) $9\sqrt{3}$ (۳) ۱۸ (۴) $10\sqrt{3}$

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۸% متوسط

⑤

سطح مقطع حاصل از تقاطع یک کره با صفحه ای به فاصله ۳ از مرکز آن، دایره ای به مساحت 27π است. عدد حجم کره چند برابر عدد مساحت کره است؟(۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

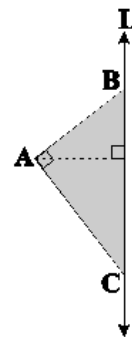
قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۳۷% ساده

⑥

در یک بیضی، قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

مثلث قائم‌الزاویه ABC را مطابق شکل زیر، حول محور L دوران می‌دهیم. اگر فاصله A از خط L و نقطه B به ترتیب برابر $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{31}}{3}$ باشد، آن‌گاه حجم شکل حاصل کدام است؟



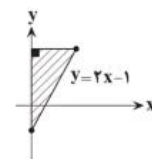
(۱) $\frac{9\pi}{3}$

(۲) $\frac{7\pi}{3}$

(۳) 3π

(۴) $\frac{5\pi}{3}$

مطابق شکل وتر مثلث به معادله $y = 2x - 1$ ، با شرط $0 \leq x \leq 3$ مفروض است. اگر مثلث را حول محورهای دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟



(۱) 12π

(۲) 15π

(۳) 18π

(۴) 21π

در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

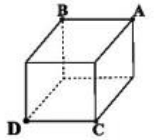
(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

شکل زیر یک مکعب را نشان می‌دهد. مساحت کل این مکعب، چند برابر سطح گذرنده از نقاط نشان داده شده در شکل زیر است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

اگر شعاع دایره $x^2 + y^2 + ax + by - 2 = 0$ برابر ۲ و خط $y = x - 2$ ، یکی از خطوط قائم بر این دایره باشد، آن گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۸

(۲) ۸

(۱) ۴

اگر نقطه $A(m, 2m+1)$ داخل دایره $x^2 + y^2 - 2x + y - 8/4 = 0$ باشد، آن گاه m چند مقدار صحیح را اختیار می‌کند؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

طول وتری که خط $y = x - 1$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ جدا می‌کند، چه قدر است؟

(۴) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{7}$ (۱) $\sqrt{7}$

اگر دو رأس A و B از مستطیل $ABCD$ منطبق بر دو سر یک قطر از دایره‌ای با معادله $x^2 + (y-1)^2 = 2$ و ضلع CD مماس بر این دایره باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۸

دایره گذرا بر نقطه $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

(۴) ۲, ۵

(۳) ۲, ۴

(۲) ۱, ۵

(۱) ۱, ۴

قطری از دایره‌ی $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ که موازی خط $y = 2x + 1$ است، از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

(۲) $(-2, 2)$ (۱) $(-2, 4)$ (۴) $(0, -1)$ (۳) $(0, 1)$

به ازای کدام مقدار a ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

(۴) ۵

(۳) ۳

(۲) $\frac{5}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۸

دایره‌ای به مرکز (α, β) در ربع اول دستگاه مختصات بر محور x ها و نیمساز ربع اول مماس است. $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱ - $\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2} - 1$ (۳)

$\sqrt{2} + 1$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۷

۱۹

شعاع دایره‌ای به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۸

۲۰

مراکز دایره‌هایی به معادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 25$ که از خط $3y + 4x = 1$ وترهایی به طول ۸ جدا کند، بر روی کدام خط می‌توانند باشند؟

$3y + 4x = 15$ (۲)

$3y + 4x = 16$ (۱)

$3y + 4x = -12$ (۴)

$3y + 4x = -13$ (۳)

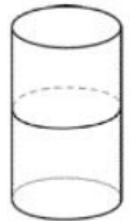
همانند شکل‌های زیر، اگر صفحه‌ی مایل برخورد کند، بیضی و اگر صفحه‌ی افقی برخورد کند دایره و اگر صفحه‌ی عمودی برخورد کند مستطیل حاصل می‌شود.



صفحه عمودی ← مستطیل

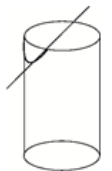


صفحه مایل ← بیضی



صفحه افقی ← دایره

حال اگر صفحه‌ای که با استوانه برخورد می‌کند از قاعده‌های استوانه عبور کند شکل سهمی به وجود می‌آید. به شکل زیر توجه کنید:

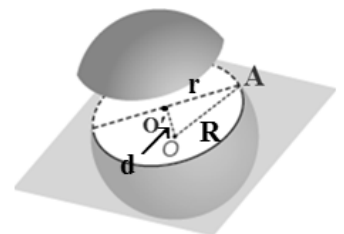


بیشترین سطح مقطع حاصل از تقاطع یک صفحه با یک کره، زمانی حاصل می‌شود که صفحه از مرکز کره بگذرد که اگر شعاع کره R باشد، مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع R خواهد بود که مساحت آن πR^2 است.

اگر مقطع حاصل پس از جابه‌جایی صفحه، مساحتی نصف سطح مقطع قبلی داشته باشد، باید:

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} \pi R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (*)$$

با به کار بردن قضیه فیثاغورس در مثلث AOO' در شکل، داریم:

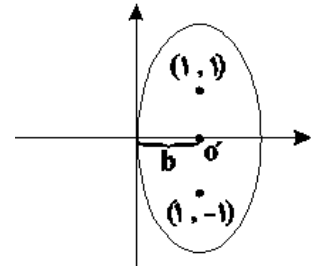


$$R^2 = d^2 + r^2 \xrightarrow{(*)} R^2 = d^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{R^2}{2} = d^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$

$$F(1, 1), F'(1, -1) \Rightarrow FF' = 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} \Rightarrow e = \frac{1}{a}$$



شکل را نگاه کنید. بیضی در صورتی بر محور y ها مماس می‌شود که $b = 1$ باشد. می‌دانیم:

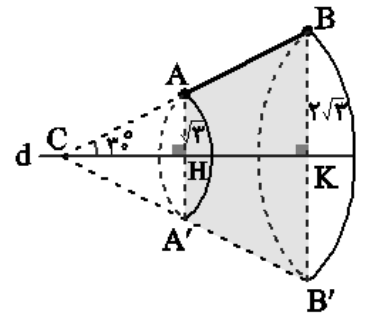
$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c=1} a^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

بنابراین $e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

متوسط سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل، سطح مقطع حاصل از این برش، برابر با مساحت ذوزنقه $ABB'A'$ است که قاعده‌های آن:



$$BB' = 4\sqrt{3} \text{ و } AA' = 2\sqrt{3}$$

هستند. با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \triangle ACH : \tan 30^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{CH} \Rightarrow CH = 3 \\ \triangle BCK : \tan 30^\circ = \frac{BK}{CK} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{CK} \Rightarrow CK = 6 \end{cases}$$

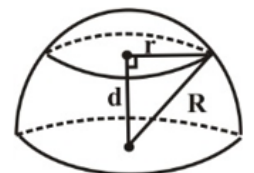
پس ارتفاع این ذوزنقه $HK = CK - CH = 6 - 3 = 3$ است و مساحت آن برابر است با:

$$\frac{1}{2}(AA' + BB') \times HK = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۸% قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

اگر شعاع دایره مقطع برابر r و فاصله صفحه مقطع از مرکز کره برابر d و شعاع کره برابر R باشد، آنگاه: $d^2 + r^2 = R^2$.



$$\pi r^2 = 27\pi \Rightarrow r = 3\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$$

$$\Rightarrow R = 6 \Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ

اگر قطر بزرگ بیضی را با $2a$ و قطر کوچک آن را با $2b$ نشان دهیم، داریم:

$$2a = 3 \times 2b \Rightarrow a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$$

با توجه به آن که در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، پس:

$$\Rightarrow a^2 = 9(a^2 - c^2) \Rightarrow 8a^2 = 9c^2$$

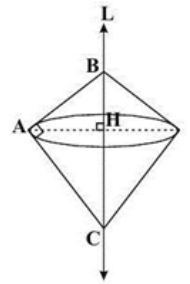
خروج از مرکز بیضی به صورت $e = \frac{c}{a}$ تعریف می‌شود:

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۰٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۲

با دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول محور L ، دو مخروط یکی به ارتفاع BH و شعاع قاعده AH و دیگری به ارتفاع CH و شعاع قاعده AH مطابق شکل زیر به وجود می‌آید. پس داریم:



$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot CH$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot (BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB ، می‌دانیم $AH^2 + BH^2 = AB^2$. پس $BH = \sqrt{\frac{21}{5} - 3} = \frac{2}{5}$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow \frac{21}{5} = \frac{2}{5} \times BC \Rightarrow BC = \frac{21}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{3})^2 \left(\frac{21}{2}\right) = \frac{21\pi}{2}$$

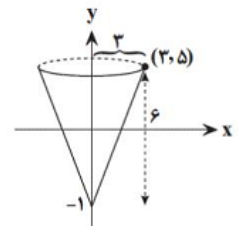
حال خواهیم داشت:

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۵٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۳

از دوران مثلث داده شده حول محور l ها یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ حاصل می‌شود. می‌دانیم حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است.

$$V = \frac{1}{3}\pi (3)^2 \times 6 = 18\pi$$

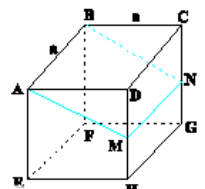


خارج از کشور ۱۳۹۸ نسبتا دشوار

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

مطابق شکل زیر، صفحه گذرنده از یال BA و وسط یال DH (نقطه M)، از وسط یال CG (نقطه N) نیز می‌گذرد. پس سطح مقطع این برش، مستطیل $ABNM$ است. داریم:



$$\Delta AD M : AM^2 = AD^2 + DM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

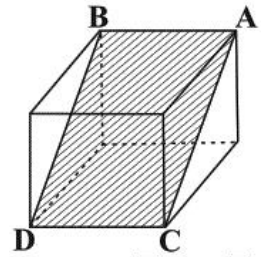
$$S_{ABNM} = AB \times AM = a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABNM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۴٪ قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

طول هر یال مکعب را a در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، مقطع صفحه گذرنده، مستطیل $ABDC$ است. چون AC قطر وجه مکعب است، پس طول آن برابر است با $AC = a\sqrt{2}$.



$$\begin{cases} S(ABDC) = AB \times AC = (a)(a\sqrt{2}) = \sqrt{2}a^2 \\ \text{مساحت کل مکعب} = 6a^2 \end{cases}$$

بنابراین نسبت مساحت کل مکعب به مساحت مستطیل $ABDC$ برابر است با $\frac{6a^2}{\sqrt{2}a^2} = 3\sqrt{2}$.

دشوار درصد پاسخگویی ۵٪ قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۴

مرکز این دایره، نقطه $(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4})$ است. چون هر خط قائم بر دایره از مرکز آن عبور می‌کند، بنابراین:

$$-\frac{b}{4} = -\frac{a}{4} - 2 \Rightarrow b = a + 4 \quad (*)$$

شعاع این دایره برابر ۲ است، پس داریم:

$$2 = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4(-2)} \Rightarrow a^2 + b^2 + 8 = 16$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + (a+4)^2 = 8 \Rightarrow 2a^2 + 8a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸٪ قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

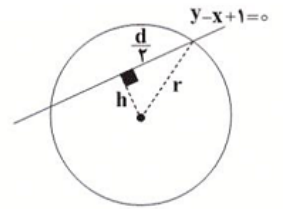
چون ضرایب x^2 و y^2 مثبت‌اند، پس: اگر نقطه A درون دایره P باشد باید شرط $P(A) < 0$ برقرار باشد:

$$m^2 + (2m+1)^2 - 2m + 2m + 1 - 8/4 < 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 6/4 < 0$$

$$\begin{cases} \Delta = 16 + 4(5)(6/4) = 16 + 128 = 144 \\ m = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{10} = -\frac{4}{5}, \frac{4}{5} \end{cases}$$

بنابراین $-\frac{4}{5} < m < \frac{4}{5}$ قرار می‌گیرد. در این صورت شامل دو عدد صحیح می‌باشد.



برای درک بهتر مسئله شکل بالا را در نظر بگیرید باید شعاع دایره و فاصله مرکز دایره از خط مورد نظر را به دست آوریم: $(y - x + 1 = 0)$

$$\text{مختصات مرکز: } O\left(-\frac{(-4)}{1}, -\frac{2}{1}\right) = (2, -1)$$

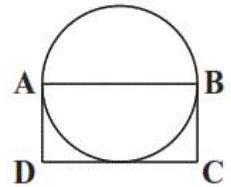
$$\text{شعاع دایره (r)} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} \sqrt{16+4-4(-4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{36} = 3$$

$$\text{فاصله مرکز از خط (h)} = \frac{|-1-2+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{طبق قضیه فیثاغورس: } \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7} \Rightarrow d = 2\sqrt{7}$$

گزینه (۳)

شکلی از مسئله ترسیم می‌کنیم.



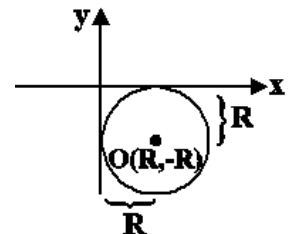
واضح است که طول مستطیل $2r$ و عرض مستطیل $2r$ است، پس داریم:

$$S_{ABCD} = 2r^2$$

$$r = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \times 2 = 4 \quad \text{از معادله دایره می‌دانیم:}$$

گزینه ۲

با توجه به نقطه $(1, -2)$ ، دایره در ناحیه چهارم بر محورهای مختصات مماس است. بنابراین:



با توجه به معادله یک دایره، داریم:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

$$\xrightarrow{(1, -2)} (1 - R)^2 + (-2 + R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2$$

$$\Rightarrow R = 1$$

قطر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مختصات یکی از نقاط روی قطر همان مرکز دایره است. به علاوه قطری را می‌خواهیم که موازی خط $y = 2x + 1$ باشد، یعنی شیب قطر باید برابر ۲ باشد.

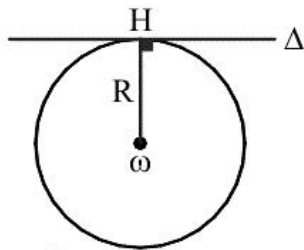
مرکز دایره $O(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}) = (-1.5, -2)$ را $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}) = (-1.5, -2)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = 2(x - (-1.5))$$

$$\Rightarrow y - 2 = 2x + 6 \Rightarrow y = 2x + 8$$

نقطه $(-2, 4)$ روی این قطر قرار دارد.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$$

گزینه «۲»

راه حل اول:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره } \omega \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2} \right) = (1, -2) \\ \text{شعاع دایره } R = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 - a} = \sqrt{5 - a} \end{cases}$$

فاصله نقطه $\omega(1, -2)$ از خط $\Delta: x + 3y = 0$ ، برابر است با:

$$\omega H = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از آن خط، برابر با شعاع دایره است، پس باید:

$$\omega H = R \Rightarrow \sqrt{5 - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\sqrt{5 - a})^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 5 - a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

راه حل دوم:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (*) \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \end{cases}$$

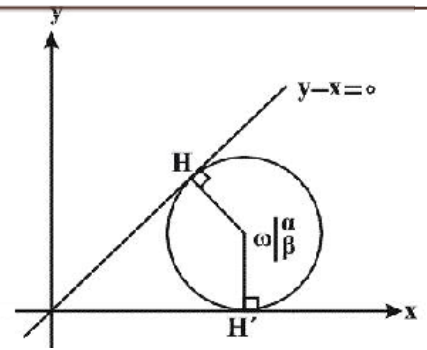
$$(*) \rightarrow (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \quad (\text{معادله تقاطع})$$

معادله تقاطع، یک معادله درجه دوم است، پس برای آن که دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، باید:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 10^2 - 4(10)(a) = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$$

مطابق شکل، فاصله مرکز دایره از خط $y - x = 0$ ، باید با فاصله آن از خط $y = 0$ برابر باشد:



$$R = \overline{\omega H} = \overline{\omega H'} \Rightarrow \frac{|\beta - a|}{\sqrt{2}} = |\beta| \Rightarrow |\beta - a| = |\sqrt{2}\beta|$$

$$\Rightarrow \beta - a = \pm\sqrt{2}\beta \Rightarrow a = (1 \pm \sqrt{2})\beta$$

از آنجا که در صورت سؤال تأکید شده است که دایره در ربع اول بر نیمساز ربع اول مماس است. بنابراین a و β هم‌علامت هستند و تنها حالت $a = (1 + \sqrt{2})\beta$ را می‌پذیریم که در این صورت:

$$\frac{\beta}{a} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۲۰٪ متوسط

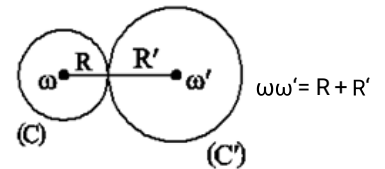
پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر $C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی یک دایره باشد مختصات مرکز و شعاع این دایره به‌ترتیب برابر با $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ و $R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ است.

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2) \text{ و } R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 - 1} = 2$$

اگر دایره‌ی C' به مرکز $\omega'(-2, 2)$ و شعاع R' با دایره‌ی C مماس خارج باشد، آنگاه:

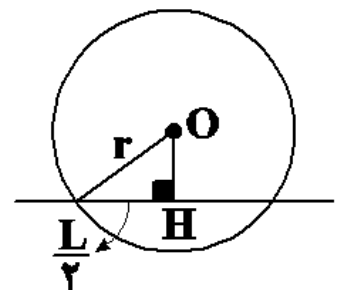


$$\Rightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = 2 + R'$$

$$\Rightarrow 5 = 2 + R' \Rightarrow R' = 3$$

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۵٪ متوسط

پاسخ: گزینه ۱



با توجه به شکل فرضی می‌دانیم:

$$(OH)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = r^2$$

در دایره مفروض: $O_1(a, \beta)$, $R_1 = 5$

$$(OH)^2 = 25 - (4)^2 = 9$$

$$OH = 3$$

OH فاصله مرکز دایره از خط $3y + 4x - 1 = 0$ می‌باشد. پس فرمول فاصله را می‌نویسیم: $OH = \frac{|3\beta + 4\alpha - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$

$$|3\beta + 4\alpha - 1| = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\beta + 4\alpha = 16 \Rightarrow 3y + 4x = 16 \\ 3\beta + 4\alpha = -14 \Rightarrow 3y + 4x = -14 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $3y + 4x = 16$ مورد قبول است.



قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۵% متوسط

①

محصولات یک کارخانه توسط سه ماشین A، B و C تولید می‌شود که به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۳۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند. می‌دانیم ۳ درصد از محصولات A و ۳ درصد از محصولات C معیوب هستند و اگر یکی از محصولات این کارخانه را به تصادف انتخاب کنیم با احتمال ۵ درصد معیوب می‌باشد، چند درصد از محصولات تولیدی ماشین B معیوب است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۱% دشوار

②

دو تاس را با هم می‌ریزیم. در صورتی که بدانیم مجموع دو عدد رول شده بیش‌تر از ۴ است، احتمال این‌که کوچک‌ترین عدد رول شده ۳ باشد، کدام است؟

 $\frac{۳}{۱۰}$ (۴) $\frac{۷}{۳۰}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۴}{۱۵}$ (۱)

قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۲۹% متوسط

③

ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

 $\frac{۱۱}{۳۱}$ (۴) $\frac{۱۰}{۳۱}$ (۳) $\frac{۲۶}{۶۳}$ (۲) $\frac{۲۵}{۶۳}$ (۱)

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۹% متوسط

④

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ ، $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۳}{۴}$ ، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

 $\frac{۵}{۸}$ (۴) $\frac{۷}{۱۳}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۸}$ (۱)

قلمچی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۳۲% ساده

⑤

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S و $P(B|A) = \frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{P(A \cap B)}{P(A-B)}$ کدام است؟

 $\frac{۱}{۳}$ (۴) $\frac{۲}{۳}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۸% دشوار گزینه‌های دام دار ۳

⑥

سه کیسه داریم. در کیسه اول ۴ مهره آبی و ۲ مهره قرمز، در کیسه دوم ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در کیسه سوم ۵ مهره آبی و ۱ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف یک کیسه را انتخاب کرده و دو مهره از آن خارج می‌کنیم. اگر دو مهره هم‌رنگ نباشند، با کدام احتمال از کیسه اول خارج شده‌اند؟

 $\frac{۹}{۲۲}$ (۲) $\frac{۴}{۱۱}$ (۴) $\frac{۵}{۲۲}$ (۱) $\frac{۸}{۴۵}$ (۳)

قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۶% متوسط

⑦

جعبه A دارای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و جعبه B دارای ۲ مهره سفید و ۶ مهره سیاه می‌باشد. تاسی داریم که روی وجه‌های آن تنها دو عدد X و Y نوشته شده است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ظاهر شده X باشد از طرف A و اگر عدد ظاهر شده Y باشد از طرف B مهره‌ای را انتخاب می‌کنیم. اگر احتمال انتخاب شدن مهره‌های سفید و سیاه با یکدیگر برابر باشد، روی چند وجه تاس عدد X نوشته شده است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهر شده عددی مربع کامل است. احتمال آن که عدد تاس اول بزرگتر یا مساوی ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$

احتمال این که هومن، مازیار و پارسا، هر سه در سمیناری شرکت کنند، $\frac{36}{100}$ است. احتمال شرکت کردن پارسا در صورتی که مازیار و هومن شرکت کنند، $\frac{8}{100}$ و احتمال شرکت کردن هومن اگر مازیار شرکت کند، $\frac{75}{100}$ است. احتمال شرکت کردن مازیار در سمینار چقدر است؟

$$\frac{8}{100} \quad (4)$$

$$\frac{7}{100} \quad (3)$$

$$\frac{6}{100} \quad (2)$$

$$\frac{5}{100} \quad (1)$$

از کیسه A که شامل ۳ مهره آبی و ۲ مهره قرمز است، یک مهره به تصادف خارج و در کیسه B که شامل ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی است قرار می‌دهیم و از کیسه B یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آن که این مهره آبی باشد، چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

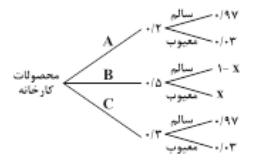
$$\frac{13}{30} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

متوسط درصد پاسخگویی ۱۵٪ قلمچی ۱۳۹۸

ابتدا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب بودن}) = 0.2 \times 0.03 + 0.5 \times X + 0.3 \times 0.03$$

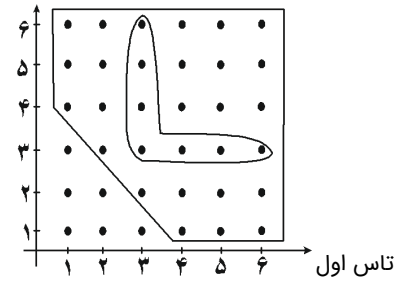
$$\Rightarrow 0.05 = 0.015 + 0.5X$$

$$\Rightarrow 0.5X = 0.035 \Rightarrow X = 0.07$$

پاسخ: گزینه ۳

دشوار درصد پاسخگویی ۱۱٪ قلمچی ۱۳۹۶

تاس دوم



در شکل، فضای نمونه‌ای کاهش یافته و پیشامد مطلوب نمایش داده شده است. با توجه به شکل، احتمال این‌که کوچک‌ترین عدد روشده ۳ باشد به شرطی که مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴ باشد برابر $\frac{7}{30}$ است.

پاسخ: گزینه ۱

متوسط درصد پاسخگویی ۲۹٪ قلمچی ۱۴۰۰

گزینه ۱»

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\text{انتخاب ظرف} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A: \frac{1}{3} \rightarrow \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{4 \times 3 \times 5 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{60}{126} \\ B: \frac{1}{3} \rightarrow \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 5 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{45}{126} \\ C: \frac{1}{3} \rightarrow \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{5 \times 6 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{45}{126} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{3} \times \frac{60}{126} + \frac{1}{3} \times \frac{45}{126} + \frac{1}{3} \times \frac{45}{126} = \frac{1}{3} \left(\frac{60+45+45}{126} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{150}{126} = \frac{25}{63}$$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط درصد پاسخگویی ۲۹٪ قلمچی ۱۳۹۸

گزینه ۴»

$$P(B|A) = P(B) - P(A)$$

$$= \frac{2}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

ساده درصد پاسخگویی ۳۲٪ قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۲

اگر $P(A \cap B) = x$ فرض شود، داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{\frac{2}{3}} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A-B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) - P(A \cap B)} = \frac{x}{\frac{2}{3}x - x} = \frac{x}{\frac{1}{3}x} = 3$$

دشوار درصد پاسخگویی ۸٪ قلمچی ۱۳۹۹ گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$X \left\{ \begin{array}{l} \text{انتخاب دو مهره ی غیر هم رنگ} \rightarrow \frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} \\ \text{انتخاب دو مهره ی غیر هم رنگ} \rightarrow \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \\ \text{انتخاب دو مهره ی غیر هم رنگ} \rightarrow \frac{\binom{5}{1} \binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{15}$$

$$= \frac{6}{15}$$

$$= \frac{5}{15}$$

اگر پیشامد هم رنگ نبودن دو مهره را A و پیشامد خارج شدن از کیسه اول را B بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{15} = \frac{22}{45}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{45}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{22}{45}} = \frac{1}{22}$$

متوسط درصد پاسخگویی ۱۶٪ قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید روی X وجه تاس، عدد X و روی Y وجه آن، عدد Y نوشته شده باشد. داریم:

$$x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x$$

$$1) \text{ احتمال انتخاب مهره سفید: } \frac{x}{6} \times \frac{6-x}{6} + \frac{6-x}{6} \times \frac{x}{6}$$

$$2) \text{ احتمال انتخاب مهره سیاه: } \frac{x}{6} \times \frac{x}{6} + \frac{6-x}{6} \times \frac{6-x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5x+12-2x}{36} = \frac{3x+36-6x}{36}$$

$$\Rightarrow 3x + 12 = -3x + 36 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۳٪ قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده از ۲ تا ۱۲ است که مربعهای کامل در این محدوده، ۴ و ۹ هستند. فضای نمونه اولیه $6 \times 6 = 36$ عضو دارد. از فضای نمونه کاهش یافته برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. می‌دانیم مجموع دو تاس، عددی مربع کامل ظاهر شده، پس داریم:

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 4)\}$$

اگر A پیشامد آن باشد که تاس اول، حداقل ۳ آمده باشد، آن گاه داریم:

$$A = \{(3, 1), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{7}$$

دشوار درصد پاسخگویی ۷۰٪ قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

A: هومن در سمینار شرکت کند.

B: مازیار در سمینار شرکت کند.

C: پارسا در سمینار شرکت کند.

$$P(A \cap B \cap C) = 0/36, \quad P(C|A \cap B) = 0/8$$

$$P(A|B) = 0/75, \quad P(B) = ?$$

طبق قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد \$A, B\$ و \$C\$ داریم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(B)P(A|B)P(C|A \cap B)$$

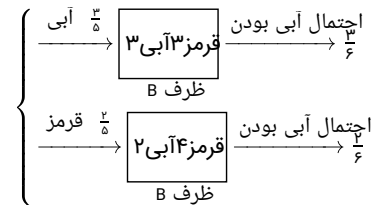
$$\Rightarrow 0/36 = P(B) \times 0/75 \times 0/8 \Rightarrow 0/36 = P(B) \times 0/6$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{0/36}{0/6} = 0/6$$

متوسط درصد پاسخگویی ۲۸٪ قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

مهره انتخابی از جعبه A، به احتمال $\frac{3}{5}$ ، آبی و به احتمال $\frac{2}{5}$ قرمز است:



$$\Rightarrow P(\text{آبی}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{9+4}{30} = \frac{13}{30}$$