نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۱ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

(۱) اگر $f(x) = 2^{5-x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(2x-1) \geq f(x+2)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) بی‌شمار ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

(۲) اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 25x - 3$ برابر با ۳ باشد، مجموع صفرهای دیگر این تابع کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴- ۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

(۳) اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$، آن‌گاه دوره تناوب تابع $f.g$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) تابع متناوب نیست.

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

(۴) تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه $f(3a-1) < f(a+1)$ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

۱) $a \geq 2$ ۲) $a \geq 1$ ۳) $a > 1$ ۴) $a > 2$

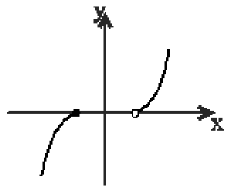
قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

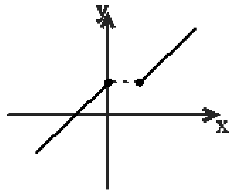
(۵) اگر $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{x+3}} \leq \log_2^{2x-1}$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح است؟

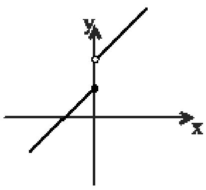
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

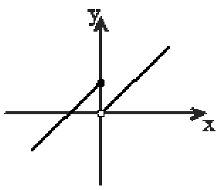
سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | ساده

(۶) کدام تابع با نمودار زیر، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۳% | ساده

(۷) اگر $x = 2$ طول یکی از نقاط برخورد دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2 + 4x - 4$ باشد، دو نقطه تلاقی دیگر در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟

۱) $3\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) ۶ ۴) $2\sqrt{10}$

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

(۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ در بازه‌ی $[0, 3]$ ....

۱) یک به یک است. ۲) صعودی است. ۳) نزولی است. ۴) ثابت است.

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

۹) اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = x + [x]$ آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[0 , +\infty)$ ۲) R ۳) $[0 , 1)$ ۴) $(0 , 1)$

گزینه های دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۱% | دشوار

۱۰) اگر

$$f = \{(-2 , 2) , (-1 , 3) , (2\sqrt{2} , 0) , (\sqrt{6} , -1) , (2 , 0)\}$$

و $g(x) = \sqrt{4 - 2x}$ باشند، مجموع اعضای دامنه تابع $\frac{f}{fog}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۱-

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۴۲% | ساده

۱۱) اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2\cos^2 x$ باشد، مقدار $fog\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

۱۲) اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x - 1}$ باشند، ضابطه وارون تابع fog کدام است؟

۱) $(fog)^{-1}(x) = x \,;\, x \geq 1$ ۲) $(fog)^{-1}(x) = x \,;\, x \leq 1$

۳) $(fog)^{-1}(x) = \sqrt{x} \,;\, x \geq 1$ ۴) $(fog)^{-1}(x) = \sqrt{x} \,;\, x \leq 1$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۷% | متوسط

۱۳) اگر $f(x) = x^2 + 4x$ و $f(g(x)) = x^2 - 2x - 3$ باشند و g(x) اکیداً صعودی باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع g(x) و محورهای مختصات در ناحیهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

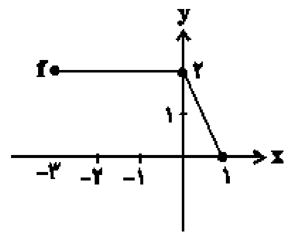
۱۴) قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

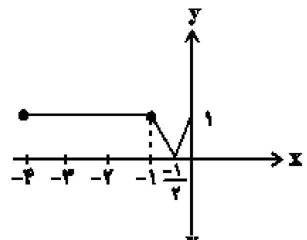
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۰% | متوسط

(۱۵)

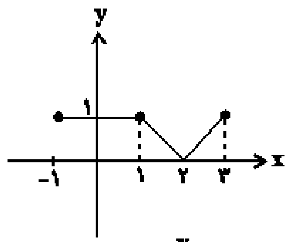
اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، آنگاه نمودار تابع $y = |-f(x+1)+1|$ کدام است؟



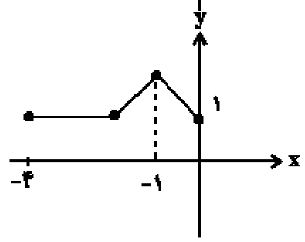
(۱



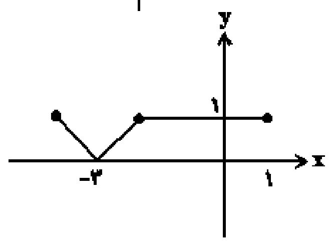
(۲



(۳



(۴



قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

(۱۶)

اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{2x+4}$ باشند، آن‌گاه دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

(۱ $[-1, 0)$ (۲ $(-2, 2]$ (۳ $[-1, 1]$ (۴ $[0, 1]$

قلم‌چی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

(۱۷)

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3+ax+2a$ مفروض است. اگر عرض از مبدأ نمودارتابع f^{-1} برابر (-1) باشد، a کدام است؟

(۱ ۲ (۲ ۱ (۳ $\frac{1}{2}$ (۴ $\frac{1}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۲% | ساده

(۱۸)

اگر $f(x) = g(2x+5)$ و $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{8x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(4)$ کدام است؟

(۱ $\frac{2}{3}$ (۲ $-\frac{2}{3}$ (۳ $\frac{3}{2}$ (۴ $-\frac{3}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

(۱۹)

اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد R باشند و داشته باشیم: $f^{-1}(g(4)) = 5$ و $g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4$؛ آن‌گاه حاصل $f(f(5))$ کدام است؟

(۱ ۳ (۲ ۴ (۳ ۵ (۴ اطلاعات مسئله کافی نیست.

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۵۱% | ساده

(۲۰)

دو تابع $f = \{(5, 2), (4, 4), (3, 5)\}$ و $g(x) = 3x+1$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(2f^{-1}(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

(۱ ۲ (۲ ۳ (۳ ۴ (۴ ۵

دشوار | درصد پاسخگویی ۱۱% | قلم‌چی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۴

(۲۱)

ضابطه معکوس تابع $f(x) = x^۲ + ۶x - ۱$ با فرض $(x \leq -۴)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = -۳ - \sqrt{x + ۱۰} \;; x \geq -۹$

۲) $f^{-۱}(x) = -۳ + \sqrt{x + ۱۰} \;; x \leq -۱۰$

۳) $f^{-۱}(x) = -۳ - \sqrt{x + ۱۰} \;; x \geq -۱۰$

۴) $f^{-۱}(x) = -۳ + \sqrt{x + ۱۰} \;; x \geq -۹$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۰% | قلم‌چی ۱۳۹۶

(۲۲)

اگر $f = \{(۱,۳),(۲,۱),(۴,۵),(۳,۴),(۵,۷)\}$ و $g = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۷,۶)\}$، آن‌گاه کدام زوج مرتب زیر در $g^{-۱} o f^{-۱}$ وجود ندارد؟

۱) $(۳,۲)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۷,۴)$ ۴) $(۶,۵)$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۲۳)

اگر $g(x) = \frac{۵x-۱}{۲x-۶}$، $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $f^{-۱}(g(a)) = ۴$ باشد، مقدار $g^{-۱}(a)$ کدام است؟

۱) ۵/۸ ۲) ۶/۲

۳) ۴/۶ ۴) ۳/۴

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلم‌چی ۱۳۹۵

(۲۴)

اگر $f(x) = ۲x + |x|$ باشد، معادله‌ی $f^{-۱}(x) + ۳x = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر

۲) یک

۳) دو

۴) بی‌شمار

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۷% | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۲

(۲۵)

تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹} - |x + ۲|$ در بازه‌ای یک‌به‌یک است، معکوس تابع در این بازه کدام است؟

۱) $y = \frac{x-۱}{۲} \;, x \in [-۵,۵]$ ۲) $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} \;, x \in [-۲,۳]$

۳) $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} \;, x \in [-۵,۵]$ ۴) $y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \;, x \in [-۲,۳]$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۳٪ | متوسط

راه‌حل اول:

$$f(2x-1) = 2^{5-(2x-1)} = 2^{6-2x}$$

$$f(x+2) = 2^{5-(x+2)} = 2^{3-x}$$

بنابراین باید نامعادله $2^{6-2x} \geq 2^{3-x}$ را حل کنیم. حال چون تابع $y = 2^x$ اکیداً صعودی است، کافی است نامعادله $6 - 2x \geq 3 - x$ را حل کنیم.

$$6 - 2x \geq 3 - x \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3]$$

این بازه شامل سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ است.

راه حل دوم:

$$f(x) = 2^{5-x} = 2^5 \times 2^{-x} = 32\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

تابع f نزولی است، پس داریم:

$$f(2x-1) \geq f(x+2) \Rightarrow 2x - 1 \leq x + 2 \Rightarrow x \leq 3$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۹٪ | دشوار

$x = 3$ صفر تابع f است، پس:

$$f(3) = 0 \Rightarrow 2(3)^3 + k(3)^2 + 25(3) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 54 + 9k + 75 - 3 = 0 \Rightarrow 9k = -126 \Rightarrow k = -14$$

با جای‌گذاری $k = -14$، $f(x)$ را بر $x - 3$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - 14x^2 + 25x - 3 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 6x^2 & 2x^2 - 8x + 1 \\ \cline{1-1}
-8x^2 + 25x - 3 & \\
8x^2 - 24x & \\ \cline{1-1}
x - 3 & \\
-x + 3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-3)(2x^2 - 8x + 1)$$

دو صفر دیگر تابع f، جواب‌های معادله $2x^2 - 8x + 1 = 0$ هستند. مجموع‌شان را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{8}{2} = 4$$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۸٪ | متوسط

تابع f.g را تشکیل می‌دهیم: $(f.g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = a\cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

پاسخ: گزینه ۳ | سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

گزینه «۳»

طبق تعریف تابع اکیداً نزولی داریم:

$$f(۳a-۱) < f(a+۱) \Rightarrow ۳a-۱ > a+۱ \Rightarrow a > ۱$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | متوسط

ابتدا دامنهٔ هر یک از لگاریتم‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۱}{۲} \\ x+۳ > ۰ \Rightarrow x > -۳ \end{cases} \Rightarrow x > \frac{۱}{۲}$$

از طرفی با توجه به قواعد لگاریتم داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۲}{x+۳}} = \log_{۲^{-۱}}^{\frac{۲}{x+۳}} = \log_{۲}^{\frac{x+۳}{۲}}$$

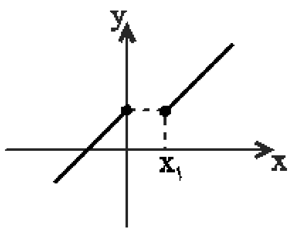
$$\log_{۲}^{۲x-۱} \leq \log_{۲}\frac{x+۳}{۲} \xrightarrow{\text{تابع } \log_{۲}^{x} \text{ اکیداً صعودی}} ۲x-۱ \leq \frac{x+۳}{۲} \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۳}$$

با توجه به دامنه‌ای که به‌دست آوردیم، اشتراک این جواب‌ها، بازهٔ $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۳}\right]$ می‌باشد که این بازه فقط شامل عدد صحیح ۱ است.

پاسخ: گزینه ۲ | سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | ساده

گزینه «۲»

نمودار تابع گزینه‌های (۱) و (۳) اکیداً صعودی‌اند زیرا با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت. نمودار تابع گزینه‌ی (۴) نه صعودی است نه نزولی.



نمودار تابع گزینه‌ی (۲) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست زیرا با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۳٪ | ساده

برای به‌دست آوردن نقاط تلاقی در ابتدا معادله تلاقی $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^{۳} = x^{۲} + ۴x - ۴$$

$$\Rightarrow x^{۳} - x^{۲} - ۴x + ۴ = (x-۲)(x^{۲}+x-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۰ \\ x^{۲}+x-۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow f(۱) = g(۱) = ۱ \\ x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = g(-۲) = -۸ \end{cases}$$

در نهایت فاصله دو نقطه $A(۱,۱)$ و $B(-۲,-۸)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^{۲} + (y_A - y_B)^{۲}} = \sqrt{۹+۸۱} = \sqrt{۹۰}$$
$$= ۳\sqrt{۱۰}$$

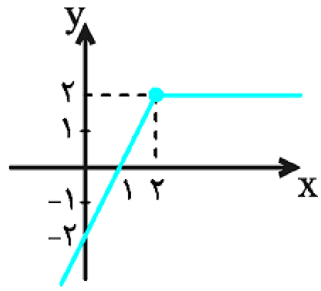
پاسخ: گزینه ۲ — سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ — متوسط

گزینه «۲»

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{(x-۲)^۲} = x - |x-۲|$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & , \quad x \geq ۲ \\ ۲x - ۲ & , \quad x < ۲ \end{cases}$$



با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع صعودی است ولی غیراکید.

پاسخ: گزینه ۳ — گزینه های دام دار ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۱۵% — متوسط

ابتدا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(x - [x]) = x - [x] + [x - [x]]$$

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$، بنابراین:

$$[x - [x]] = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = x - [x]$$

برد این تابع بازه $[۰ , ۱)$ است.

پاسخ: گزینه ۴ — گزینه های دام دار ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۱% — دشوار

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \leq ۲ | \sqrt{۴ - ۲x} \in \{-۲ , -۱ , ۲\sqrt{۲} , \sqrt{۶} , ۲\}\}$$

$$\begin{cases} \sqrt{۴ - ۲x} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۴ - ۲x = ۸ \Rightarrow x = -۲ \\ \sqrt{۴ - ۲x} = \sqrt{۶} \Rightarrow ۴ - ۲x = ۶ \Rightarrow x = -۱ \\ \sqrt{۴ - ۲x} = ۲ \Rightarrow ۴ - ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{۰ , -۱ , -۲\}$$

$$\Rightarrow fog = \{(-۲ , ۰) , (-۱ , -۱) , (۰ , ۰)\}$$

$$D_{\frac{f}{fog}} = D_f \cap D_{fog} - \{x | fog = ۰\} = \{-۱\}$$

مجموع اعضای دامنه $\frac{f}{fog} = -۱$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۴۲% — ساده

$$g\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۲\cos^۲\frac{\pi}{۳} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

حال کافی است $x = ۲$ را در $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ جای‌گذاری کنیم:

$$\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\frac{۴-۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۶ — درصد پاسخگویی ۱۹% — متوسط

ابتدا دامنه تابع fog و سپس ضابطه آن را به‌دست می‌آوریم:

$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow D_f = R$

$g(x) = \sqrt{x-1} \xrightarrow[x \geq 1]{x-1 \geq 0} D_g = \{x | x \geq 1\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 | \sqrt{x-1} \in R\}$

$\Rightarrow D_{fog} = \{x | x \geq 1\}$

$(fog)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$

همان‌طور که به خاطر دارید تابع $y = x$ یک تابع همانی است و دامنه و برد آن یکسان است، پس:

$R_{fog} = \{y | y \geq 1\}$

می‌دانیم که تابع $y = x$ جزء توابعی است که وارون آن با خود آن برابر است، بنابراین:

$(fog)(x) = x \Rightarrow (fog)^{-1}(x) = x$

$D_{(fog)^{-1}(x)} = R_{(fog)(x)} = \{x | x \geq 1\}$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۷٪ — متوسط

گزینه «۴»

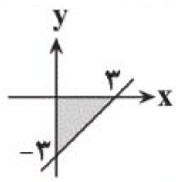
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع g، باید در تابع f به‌جای xها g بگذاریم:

$g^2 + 4g = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{\text{طرفین } +4}$

$g^2 + 4g + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (g+2)^2 = (x-1)^2$

از طرفین جذر می‌گیریم: $\Rightarrow |g+2| = |x-1| \Rightarrow g + 2 = \pm(x-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g = x - 3 \Rightarrow S_\Delta = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4/5 \\ g = -x - 1 \end{cases}$$



چون g(x) اکیداً صعودی است، $-x - 1$ جواب ما نیست و $g(x) = x - 3$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۹٪ — متوسط

$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محورها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$

$\xrightarrow{\text{واحد به راست ۲}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودارهای توابع $y = \sqrt{-x+2}$ و $y = x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$\sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

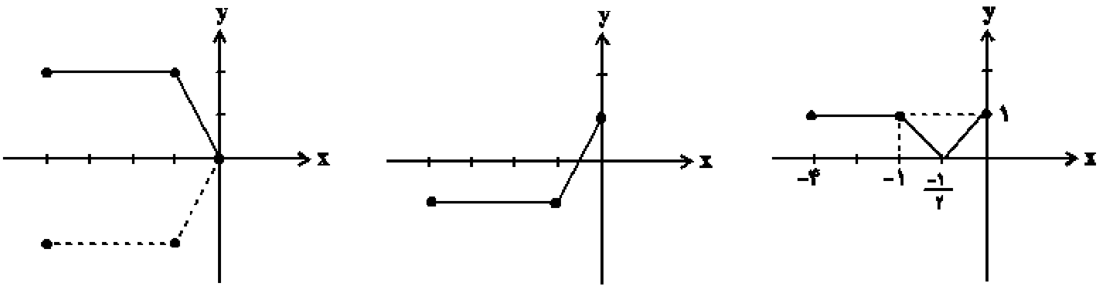
$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

$x = -2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند.

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۰٪

گزینهٔ «۱»

$y = f(x+1)$



$y = |-f(x+1)+1|$ $\quad$ $y = -f(x+1)+1$ $\quad$ $y = -f(x+1)$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۲۸٪ — متوسط

$$\begin{cases} D_f: 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ D_g: 2x+4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{-1 \leq x \leq 1 \mid \underbrace{\sqrt{1-x^2} \geq -2}_{\text{به ازای هر } x\in D_f \text{ برقرار است.}} \}$$

$$D_{gof} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۳ — درصد پاسخگویی ۸٪ — دشوار

عرض از مبدأ تابع f^{-1} برابر(-1) است. یعنی $(0,-1) \in f^{-1}$ و در نتیجه $(-1, 0) \in f$، پس با توجه به ضابطه‌ی f داریم:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۲٪ — ساده

گزینهٔ «۴»

اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، آن‌گاه داریم: $f(a) = 4$. حال مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$f(a) = g(2a+5) = 4 \Rightarrow 2a+5 = g^{-1}(4)$$

$$\xrightarrow{g^{-1}(4)=\sqrt[5]{8\times 4}=2} 2a+5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

بنابراین: $a = f^{-1}(4) = -\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۸٪ — متوسط

گزینهٔ «۱»

دقت کنید که برای تابع وارون‌پذیر h اگر $h(x_\circ) = y_\circ$ آن‌گاه $h^{-1}(y_\circ) = x_\circ$. در این مسئله: $f^{-1}(\underbrace{g(4)}_{x_\circ}) = \underset{y_\circ}{5} \Rightarrow f(5) = g(4) \quad (*)$

$$g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(3)}_{x_\circ}) = \underset{y_\circ}{4} \Rightarrow g(4) = f^{-1}(3) \quad (**)$$

از (*) و (**) داریم: $\underbrace{f(5)}_{y_\circ} = f^{-1}(\underset{x_\circ}{3}) \Rightarrow f(f(5)) = f(f^{-1}(3)) = 3$

پاسخ: — قلمچی ۱۴۰۰

گزینهٔ «۱»

$g^{-1}(۲f^{-1}(a)) = ۳ \Rightarrow ۲f^{-1}(a) = g(۳) \xrightarrow{g(۳)=۱۰} ۲f^{-1}(a) = ۱۰$

$\xrightarrow{\div ۲} f^{-1}(a) = ۵ \Rightarrow a = f(۵) \Rightarrow a = ۲$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۱% | دشوار

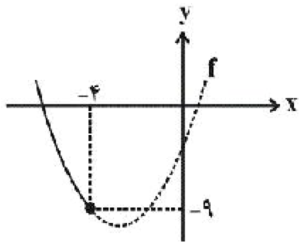
$y = x^۲ + ۶x - ۱ \xrightarrow{+۱۰} y + ۱۰ = (x+۳)^۲ \xrightarrow{x \le -۴}$

$\Rightarrow x + ۳ = -\sqrt{y+۱۰} \Rightarrow x = -۳ - \sqrt{y+۱۰}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = -۳ - \sqrt{x+۱۰}$

از طرفی برد تابع f به ازای $x \le -۴$ فاصله $[-۹, +\infty)$ است. چون:

$f(x) = x^۲ + ۶x - ۱ = (x+۳)^۲ - ۱۰ \; ; \; (x \le -۴) \Rightarrow f(x) \ge -۹$



پس دامنه f^{-1} برابر $x \ge -۹$ است.

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$

$\Rightarrow f^{-1} = \{(۳, ۱), (۱, ۲), (۵, ۴), (۴, ۳), (۷, ۵)\}$

$g^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in g\}$

$\Rightarrow g^{-1} = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۵, ۴), (۶, ۷)\}$

$g^{-1} o f^{-1} = \{(۳, ۲), (۱, ۳), (۷, ۴)\}$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

گزینه «۱»

$f^{-1}(g(a)) = ۴ \Rightarrow f(۴) = g(a)$

$۴ + \sqrt{۴} = \frac{۵a-۱}{۲a-۶} \Rightarrow ۶ = \frac{۵a-۱}{۲a-۶}$

$\Rightarrow ۱۲a - ۳۶ = ۵a - ۱ \Rightarrow ۷a = ۳۵ \Rightarrow a = ۵$

پس باید $g^{-1}(۵)$ را حساب کنیم. این مقدار مجهول را k در نظر می‌گیریم. داریم: $g(k) = ۵$.

$\Rightarrow g(k) = \frac{۵k-۱}{۲k-۶} = ۵ \Rightarrow ۵k - ۱ = ۱۰k - ۳۰ \Rightarrow k = \frac{۲۹}{۵} = ۵/۸$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

روش اول:

$\{ ۲x + x \; ; \; x \ge ۰$

حال معکوس هر کدام از ضابطه‌ها را می‌یابیم:

$f(x) = 3x\ ;(x \geq 0) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$

$f(x) = x\ ;(x < 0) \Rightarrow f^{-1}(x) = x\ (x < 0)$

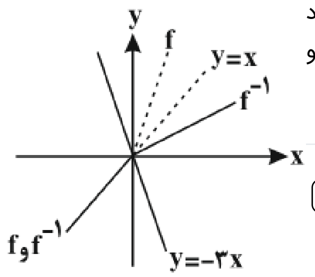
پس $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ ، حال معادله‌ی $f^{-1}(x) + 3x = 0$ را حل می‌کنیم:

$x \geq 0 : f^{-1}(x) + 3x = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} + 3x = 0 \Rightarrow \frac{10x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, +\infty)$

$x < 0 : f^{-1}(x) + 3x = 0 \Rightarrow x + 3x = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (-\infty, 0)$

پس معادله ۱ جواب دارد.

روش دوم: تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار تابع معکوس f را به‌دست می‌آوریم و سپس برای به‌دست آوردن تعداد جواب‌های معادله‌ی $f^{-1}(x) + 3x = 0$ معادله را به‌صورت $f^{-1}(x) = -3x$ می‌نویسیم و مشاهده می‌شود نمودار $y = f^{-1}(x)$ و $y = -3x$ همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادله‌ی $f^{-1}(x) + 3x = 0$، یک جواب دارد.

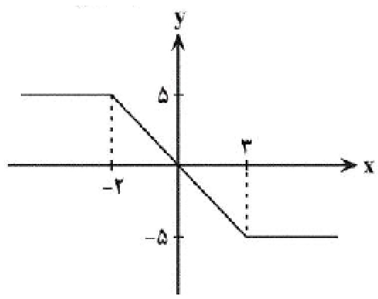


پاسخ: گزینه ۳ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۷% | متوسط

گزینه «۳»

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - |x+2| = |x-3| - |x+2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 & x > 3 \\ -2x+1 & -2 \leqslant x \leqslant +3 \\ 5 & x < -2 \end{cases}$$



$y = -2x + 1 \qquad [-2, 3]$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{-2} = -\frac{x-1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ [-5, 5]$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۲ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

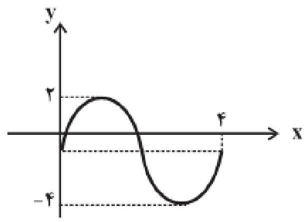
قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۶% | ساده

۱) طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ در آن یکنوا است، برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۲) اگر نمودار تابع $f(x) = a + b\sin cx$ به‌صورت شکل زیر باشد، مقدار $f\left(\frac{31}{3}\right)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{4}$
۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

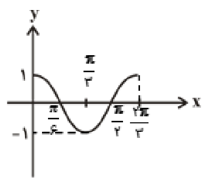
گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

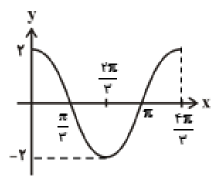
۳) اگر $\tan\alpha = 2m - 3$ و $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ باشد، حدود m کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$

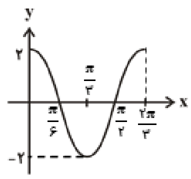
۱) $(1,2)$ ۲) $(-\infty,1)$
۳) $(2,+\infty)$ ۴) $R - [1,2]$

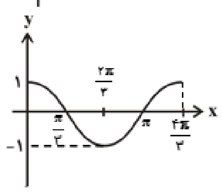
قلمچی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۵۲% | ساده

۴) کدام‌یک از گزینه‌های زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = 2\cos 3x$ است؟

۱)


۲)


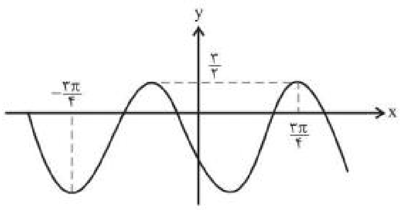
۳)


۴)


متوسط | درصد پاسخگویی ۲۵% | قلم‌چی ۱۳۹۸

۵

اگر نمودار زیر، قسمتی از تابع $y = -\frac{3}{2} + a\sin bx$ باشد، مقدار ab کدام است؟

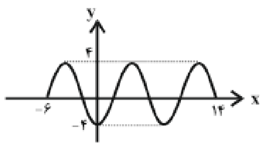


۱) ۶
۲) -۶
۳) ۳
۴) -۳

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۲ - ۴

۶

اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f\left(-\frac{32}{3}\right)$ کدام است؟



۱) $2\sqrt{3}$
۲) $-2\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) -۲

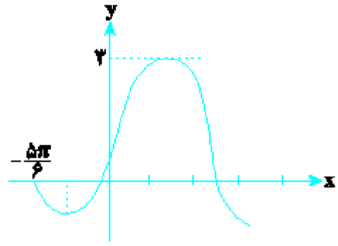
متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۷

تابع $y = -\frac{1}{2}\sin(3\pi x)$ در بازه $[-\frac{1}{2}, 1]$ چند بار بیش‌ترین مقدار را دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

(۸)
شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) $1 + \sqrt{3}$

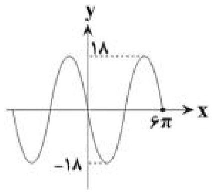
ساده | درصد پاسخگویی ٪۳۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۹)
اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = a\sin\pi ax + 4$ برابر ۸ است. دوره تناوب تابع کدام است؟

۱) ۲　۲) ۱　۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{1}{2}$

ساده | درصد پاسخگویی ٪۴۷ | قلم‌چی ۱۳۹۸

(۱۰)
اگر نمودار تابع $f(x) = b\sin(ax)$ به‌صورت زیر باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{53}{3}$　۲) $-\frac{53}{3}$
۳) -18　۴) $-\frac{1}{3}$

متوسط | درصد پاسخگویی ٪۱۹ | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۱۱)
جواب کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{4}\cos 4x$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$　۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$　۳) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{9}$　۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

متوسط | درصد پاسخگویی ٪۲۳ | قلم‌چی ۱۴۰۰

(۱۲)
مجموع جواب‌های معادله $\sin 2x + \cos 2x = 1 - \sin x + \cos x$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$　۲) 2π　۳) $\frac{13\pi}{6}$　۴) $\frac{3\pi}{2}$

متوسط | درصد پاسخگویی ٪۲۸ | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۱۳)
مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) π　۲) $\frac{3\pi}{2}$　۳) 2π　۴) صفر

دشوار | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۱۴)
صورت کلی جواب معادله $\frac{1}{\tan^2 x} + \cos 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$　۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$　۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

۱۵) معادله $\cos^4 x = 1 + \sin^4 x$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۶% | متوسط

۱۶) جواب کلی معادله‌ی $\sin x \cos x = \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
۴) جواب ندارد.

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

۱۷) معادله‌ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \cos 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۱۸) جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$ به صورت $x = 2k\pi + i\frac{\pi}{3}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $\{2, 3\}$
۲) $\{2, 1\}$
۳) $\{4, 2\}$
۴) $\{5, 4\}$

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۷% | دشوار

۱۹) جواب کلی معادلهٔ $\sin^6 x - \cos^6 x = 0$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$
۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

۲۰) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{3}{2}\cos x - \sin^2 x = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۶% — ساده

گزینهٔ «۱»

تابع تانژانت در دورهٔ تناوب خود اکیداً صعودی است. $T = \pi$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۷% — متوسط

$\max(f) = ۲ \Rightarrow a + |b| = ۲ (۱)$

$\min(f) = -۴ \Rightarrow a - |b| = -۴ (۲)$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} |b| = ۳\ ,\ a = -۱$

دوره تناوب تابع برابر ۴ است، پس داریم:

$\frac{۲\pi}{|c|} = ۴ \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲}$

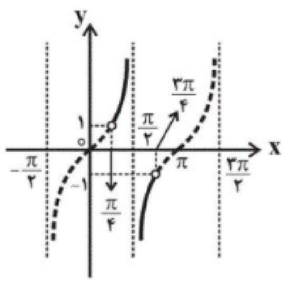
با توجه به نمودار باید $bc > ۰$ باشد، پس هر دو حالت $\begin{cases} b = ۳ \\ c = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ یا $\begin{cases} b = -۳ \\ c = -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ قابل قبول است. بنابراین ضابطه f به‌صورت $f(x) = -۱ + ۳\sin\frac{\pi x}{۲}$ است و داریم:

$f\left(\frac{۳۱}{۳}\right) = -۱ + ۳\sin\frac{۳۱\pi}{۶} = -۱ + ۳\sin\left(۵\pi - \frac{\pi}{۶}\right)$

$= -۱ - ۳\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -۱ - ۳\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ — گزینه های دام دار ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۴% — متوسط

ابتدا شکل تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $\left(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}\right)$ به‌صورت زیر رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار بالا داریم:

$\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \tan\alpha < -۱$ یا $\tan\alpha > 1$

$\Rightarrow ۲m - ۳ < -۱$ یا $2m-3>1 \Rightarrow m<1$ یا $m>2$

$\Rightarrow m \in R - [۱,۲]$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۵۲% — ساده

$y = a\cos bx\ (a,b \neq ۰)$

$\Rightarrow$ دوره‌ی تناوب $= \frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ y = ۲\cos ۳x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳}$

با توجه به مقدار دوره‌ی تناوب این تابع یعنی $\frac{۲\pi}{۳}$ و مقادیر حداقل و حداکثر این تابع که به‌ترتیب ۲- و ۲ می‌باشند، نمودار گزینه‌ی «۳» صحیح است. ضمناً اگر در تابع به جای x اعداد $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم، مقدار y برابر صفر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۵% — متوسط

گزینهٔ «۲»

ماکزیمم تابع برابر با $|a| + -\frac{۳}{۲}$ است و با توجه به شکل، برابر با $\frac{۳}{۲}$ است، بنابراین:

$$-\frac{۳}{۲} + |a| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

فاصلهٔ نقطهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$ و $-\frac{۳\pi}{۴}$ به‌اندازهٔ ۵/۱ برابر دورهٔ تناوب تابع است. بنابراین:

$$\frac{۳\pi}{۴} - \left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) = \frac{۳}{۲}T \Rightarrow T = \pi$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

با توجه به اینکه تابع بعد از $x = ۰$ به‌صورت نزولی است، بنابراین $ab < ۰$ است. یعنی a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$a = ۳ , b = -۲ \Rightarrow ab = -۶$$

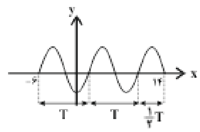
یا $a = -۳ , b = ۲ \Rightarrow ab = -۶$

پاسخ: گزینه ۳ | متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | قلمچی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۲ - ۴

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = a\underbrace{\cos(\pi + bx)}_{-\cos bx} \Rightarrow f(x) = -a\cos bx$$

نمودار رسم شده، تابع را در ۵/۲ دوره تناوب نشان می‌دهد. پس:



$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}T = ۱۴ - (-۶) \Rightarrow \frac{۵}{۲}T = ۲۰ \Rightarrow T = ۸$$

از طرفی دوره تناوب تابع از رابطه $\frac{۲\pi}{|b|}$ به‌دست می‌آید: پس:

$$\frac{۲\pi}{|b|} = ۸ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۴}$$

از طرفی مقدار تابع در $x = ۰$ برابر ۴- است، پس:

$$f(۰) = -۴ \Rightarrow -a\underbrace{\cos ۰}_{۱} = -۴ \Rightarrow a = ۴$$

در نتیجه ضابطه f به‌صورت $f(x) = -۴\cos\frac{\pi x}{۴}$ (یا $f(x) = -۴\cos(-\frac{\pi x}{۴})$) در می‌آید و داریم:

$$f\left(-\frac{۳۲}{۳}\right) = -۴\cos\left(\frac{\pi}{۴} \times \frac{-۳۲}{۳}\right) = -۴\cos\left(\frac{-۸\pi}{۳}\right)$$

$$= -۴\cos\left(\frac{۸\pi}{۳}\right) = -۴\cos\left(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}\right) = -۴\cos\frac{۲\pi}{۳} = -۴ \times \frac{-۱}{۲}$$
$$= ۲$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos\theta$، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{۴}$ نیز همین است.

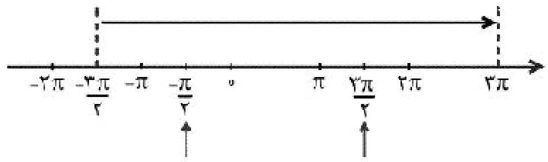
پاسخ: گزینه ۲ | متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | قلمچی ۱۳۹۷

می‌دانیم $-۱ \leq \sin(۳\pi x) \leq ۱$ پس $-\frac{۱}{۲} \leq -\frac{۱}{۲}\sin(۳\pi x) \leq \frac{۱}{۲}$ می‌باشد و بیش‌ترین مقدار آن برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. تابع وقتی بیش‌ترین مقدار می‌شود که $\sin(۳\pi x) = -۱$ باشد.

$$-\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \Rightarrow -\frac{۳\pi}{۲} \leq ۳\pi x \leq ۳\pi$$

مطابق شکل در بازهٔ $-\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۳π در دو نقطه نسبت مثلثاتی سینوس برابر ۱- می‌شود.

این نکته را از روی محور زیر می‌توانید دقیق‌تر بررسی کنید.



در نقاط مشخص شده سینوس برابر ۱- است.

پاسخ: گزینه ۲ | خارج از کشور ۱۳۹۸ | نسبتا دشوار

گزینه۲

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$

چون تابع در اطراف $x = ۰$ صعودی است پس $b > ۰$ است.

$(۱)\quad$ بیش‌ترین مقدار تابع $= a + |b| = a + b = ۳$

از طرفی مختصات نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶}, ۰)$ در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$a + b\sin(\frac{-۵\pi}{۶}) = ۰ \Rightarrow a - b\sin(\frac{۵\pi}{۶}) = ۰$$

$$\Rightarrow a - \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow a = \frac{b}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) : \frac{۳b}{۲} = ۳ \Rightarrow b = ۲\ ,\ a = ۱$$

$$y = ۱ + ۲\sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{۶}} y = ۱ + ۲\sin\frac{\pi}{۶} = ۱ + ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۳% | ساده

گزینه «۴»

بیشترین مقدار تابع $y_{max} = |a| + ۴$ و کم‌ترین مقدار آن $y_{min} = -|a| + ۴$ است. داریم:

$$y_{max} - y_{min} = ۲|a| = ۸ \Rightarrow |a| = ۴$$

از طرفی دوره تناوب نیز از رابطه $T = \frac{۲\pi}{|\pi a|} = \frac{۲}{|a|}$ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow T = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۷% | ساده

گزینه «۲»

دوره تناوب تابع ۶π و ماکزیمم آن برابر |b| است که ۱۸ می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{۲\pi}{|a|} = ۶\pi \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۳} \\ |b| = ۱۸ \Rightarrow b = \pm ۱۸ \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است؛ پس a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$\begin{cases} a = -\frac{۱}{۳}, b = ۱۸ \Rightarrow a + b = \frac{۵۳}{۳} \\ a = \frac{۱}{۳}, b = -۱۸ \Rightarrow a + b = -\frac{۵۳}{۳} \end{cases} \Rightarrow \min(a+b) = \frac{-۵۳}{۳}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۱۹٪ — متوسط

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-2\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)^2=1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$=1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\cos 4x$$

بنابراین معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\cos 4x=\tfrac{7}{4}\cos 4x\Rightarrow \cos 4x=\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\tfrac{\pi}{3}\Rightarrow x=\tfrac{k\pi}{2}\pm\tfrac{\pi}{12}\ ;\ k\in \mathbb{Z}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱ — قلمچی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۲۳٪ — متوسط

گزینهٔ «۱»

$$2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x=1-\sin x+\cos x$$

$$(2\sin x-1)\cos x-(2\sin x-1)\sin x=0$$

$$\Rightarrow (2\sin x-1)(\cos x-\sin x)=0$$

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\xrightarrow{0<x<2\pi} x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\\ \cos x-\sin x=0\Rightarrow \sin x=\cos x\xrightarrow{0<x<2\pi} x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}$$

$$\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{5\pi}{6}+\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{5\pi}{4}=\tfrac{5\pi}{2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۸٪ — متوسط

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\cos x\neq -1} 2\sin^2 x=1+\cos x$$

$$\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)=2-2\cos^2 x=1+\cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\xrightarrow{\cos x=t} 2t^2+t-1=0$$

در معادله بالا، مجموع ضریب t^2 و مقدار ثابت، برابر ضریب t است. بنابراین یکی از جواب‌های آن ۱− و جواب دیگر $\frac{1}{2}$ است. واضح است که جواب $t=-1$ با توجه به شرط $\cos x\neq -1$ غیرقابل قبول است، بنابراین داریم:

$$\cos x=\tfrac{1}{2}=\cos(\pm\tfrac{\pi}{3})\Rightarrow x=2k\pi\pm\tfrac{\pi}{3}$$

جواب‌های بازه $[0,2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi-\frac{\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ — قلمچی ۱۳۹۹ — دشوار

گزینه‌ی «۳»

$$\frac{1}{\tan^2 x}+\cos 2x=1\Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x}=1-\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x=\cos^2 x=1-\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^4 x+\sin^2 x-1=(2\sin^2 x-1)(\sin^2 x+1)=0$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x>0}\sin^2 x=\tfrac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\tfrac{k\pi}{2}+\tfrac{\pi}{4}$$

پاسخ: گزینهٔ ۴ — قلمچی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۱٪

$\cos^4 x = 1 + \sin^4 x$

$\Rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = 1$

$\Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos(2x) = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi;\ k \in Z$

واضح است که هیچ‌کدام از جواب‌های معادله در بازه $(0,\pi)$ قرار نمی گیرند.

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۱۶% — متوسط

از رابطهٔ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم (دقت کنید که $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$)

$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۴ — قلمچی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۵% — دشوار

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \cos 2x$

$\Rightarrow \cos^2 2x - 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x(\cos 2x - 2) = 0 \xrightarrow{\cos 2x \neq 2} \cos 2x = 0$

$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}\ (k \in Z)$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۷% — متوسط

گزینهٔ «۳»

$2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 9\cos x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

موقعیت کمان‌های $(-\frac{2\pi}{3})$ و $\frac{4\pi}{3}$ در دایرهٔ مثلثاتی یکسان است؛ پس $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ را به صورت $x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$ هم می‌توانیم بیان کنیم، پس مجموعهٔ مقادیر i به صورت $\{2,4\}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۷% — دشوار

$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 - (\cos^2 x)^3$

$= (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = ۰ \Rightarrow -\cos ۲x = ۰$

$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

$\frac{۳}{۲}\cos x - \sin^2 x = \frac{۳}{۲}\cos x - (۱ - \cos^2 x) = ۰$

$\Rightarrow ۲\cos^2 x + ۳\cos x - ۲ = ۰$

$\Rightarrow \cos x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲۵}}{۴} = \frac{-۳ \pm ۵}{۴}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۲ & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۳ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۴% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۳

۱) اگر $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{x-2}$، آن‌گاه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ در نقطه‌ی $x=2$ . . . .

۱) حد دارد، ولی مقدار ندارد.
۲) حد ندارد، ولی مقدار دارد.
۳) حد دارد، مقدار هم دارد.
۴) نه حد دارد و نه مقدار.

ساده | درصد پاسخگویی ۴۵% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۲) حاصل $\lim \frac{x^2-1}{x^3-|1-x|-1}$ وقتی $x \to 1^+$ کدام است؟

۱) -1 **۲)** 1 **۳)** $+\infty$ **۴)** $-\infty$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلم‌چی ۱۳۹۴

۳) حاصل $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\tan x+\sqrt{3}}{\tan x-\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ **۲)** $+\infty$ **۳)** صفر **۴)** 1

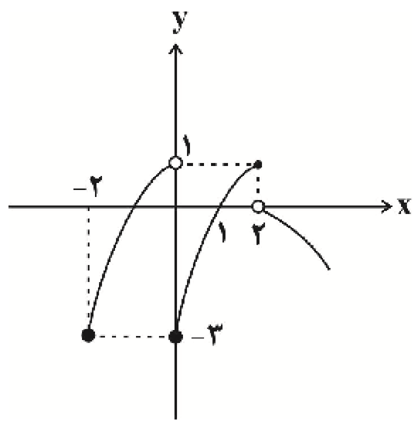
متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۳

۴) حاصل $\lim_{x \to (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{x-1}{1+\sqrt{2}\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ **۲)** $\sqrt{2}$ **۳)** $+\infty$ **۴)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۳% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۴

۵) با توجه به نمودار مقابل که مربوط به تابع $y=f(x)$ است، حاصل $\lim_{x \to 2^+} f(f(x))$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) صفر

ساده | درصد پاسخگویی ۳۸% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۶) اگر $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ باشد، حاصل حد تابع $\frac{2f(x)-2x}{f^2(x)}$ در $X=3$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$
۲) صفر
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{2}$

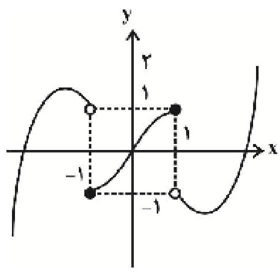
ساده | درصد پاسخگویی ۳۶% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۷) حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^4-x^2}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۸% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۴

۸) با توجه به شکل زیر که مربوط به نمودار تابع f می‌باشد، حاصل $\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|)+\lim_{x\to 0} f(1-x^2)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

دشوار | درصد پاسخگویی ۲% | قلم‌چی ۱۳۹۶

۹) حد راست تابع $f(x)=\frac{(x^3-1)+\sqrt{x^3-1}}{(1-x^2)+\sqrt{x^2-1}}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{-3}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۲% | قلم‌چی ۱۳۹۵

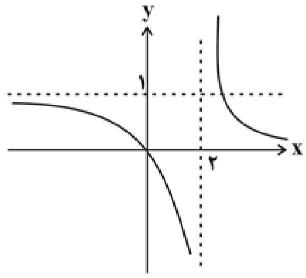
۱۰) حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) ۱
۴) $+\infty$

دشوار | درصد پاسخگویی ۴% | قلم‌چی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۲

۱۱

اگر نمودار تابع f(x) به صورت مقابل باشد، حاصل حد $\lim_{x\to 2^-} f\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ کدام است؟



۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

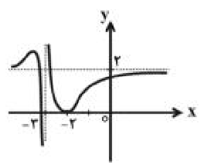
۳) صفر

۴) ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۵% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۲

۱۲

اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to(-3)^+} \frac{-x+1}{(fof)(x)-2}$ کدام است؟



۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$

۳) ۱ ۴) ۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۰% | قلم‌چی ۱۳۹۶

۱۳

اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{(m-1)x+\sqrt{nx-1}}{3\sqrt{x+2}+2} = 2$، آن‌گاه m + n کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۶ ۳) ۳۷ ۴) ۴

دشوار | درصد پاسخگویی ۱۱% | قلم‌چی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۴

۱۴

اگر $f(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{ax^n+2}$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه a + n کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۳

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۴

۱۵

اگر $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3[\frac{1}{x}]+6x^2-1}{4x^2-(1+n)x^m+5} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل mn کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هر مقداری می‌تواند باشد.

متوسط | سراسری ۱۴۰۱

۱۶

اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}$ و $\lim_{x\to1^+} (4-[x])g(x) = 6$ باشد، حاصل $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۶

۱۷) حاصل $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-4x+1}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{-2x-2}-\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۳) -2　　۴) $\sqrt{2}$

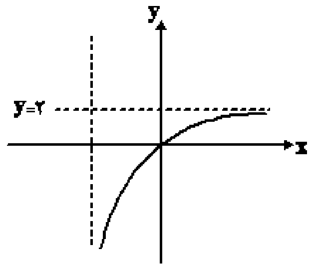
متوسط | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | گزینه های دام دار ۱

۱۸) بیش‌ترین مقدار $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^n+x^2+1}{3x^n-x^3+3}$، به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{4}{3}$　　۳) ۲　　۴) ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۹٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

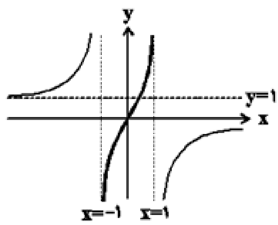
۱۹) نمودار تابع $y = \frac{bx}{x+|x-a|+3}$ به‌صورت روبه‌رو است. زوج مرتب (a, b) کدام است؟



۱) (۳, ۲)
۲) (-۳, ۲)
۳) (۳, ۴)
۴) (-۳, ۴)

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹

۲۰) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to1^-}[(fof)(x)]$ ⇐ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) -۲
۲) صفر
۳) ۱
۴) -۱

پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۴% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۳

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x|g(x) = ۰\}$$
$$= \left((R - \{۲\}) \cap (R - \{۲\})\right) - \{\} = R - \{۲\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ در $x = ۲$ مقدار ندارد. چون $x = ۲$ در دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ وجود ندارد.

$$\lim_{x\to ۲} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{x-۳}{x-۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{x-۲}} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۳)(x-۲)}{\sqrt{۲}(x-۲)} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

پس حد $\frac{f}{g}$ در $x = ۲$ وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۲

ساده | درصد پاسخگویی ۴۵% | قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینهٔ «۲»

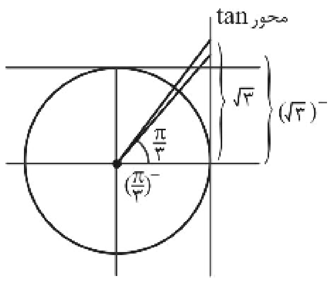
دقت کنید اگر $x \to ۱^+$، آنگاه $x > ۱$ و در نتیجه $۱ - x < ۰$.

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x^۳-|۱-x|-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x^۳+(۱-x)-۱}$$
$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x^۳-x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x(x^۲-۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x} = ۱$$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلم‌چی ۱۳۹۴

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی به ازای $x = \frac{\pi}{۳}$مقدار $\tan x = \sqrt{۳}$ است و اگر $x \to \left(\frac{\pi}{۳}\right)^-$ آنگاه $\tan x \to \left(\sqrt{۳}\right)^-$.



$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۳}\right)^-} \frac{\tan x+\sqrt{۳}}{\tan x-\sqrt{۳}} = \frac{(\sqrt{۳})^- +\sqrt{۳}}{(\sqrt{۳})^- -\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۰^-} = -\infty$$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۳

در همسایگی راست $x = \frac{۳\pi}{۴}$، عبارت $x - ۱$ مقداری مثبت به خود می‌گیرد و $\cos x < -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\sqrt{۲}\cos x < -۱ \Rightarrow ۱+\sqrt{۲}\cos x < ۰$$

یعنی در این همسایگی، حد عبارت مخرج برابر صفر است و تابع $y = ۱+\sqrt{۲}\cos x$ از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+} \frac{x-۱}{۱+\sqrt{۲}\cos x} = -\infty$$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۳% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۴

از روی شکل، واضح است که $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$ ولی f با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(f(f(x)) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$$

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳۸٪ | ساده

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)-2x}{f^2(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{2\times 6 - 2\times 3}{6^2} = \frac{1}{6}$$

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳۶٪ | ساده

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^4-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^2+1}{x^2} = 3$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0} f(1-x^2) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|) + \lim_{x\to 0} f(1-x^2)$$

$$= (-1) + 1 = 0$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲٪ | دشوار

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x^3-1)+\sqrt{x^3-1}}{(1-x^2)+\sqrt{x^2-1}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)+\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}{(1-x)(1+x)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{3(x-1)+\sqrt{3(x-1)}}{2(1-x)+\sqrt{2(x-1)}}$$

اگر $x-1=t$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{3t+\sqrt{3t}}{-2t+\sqrt{2t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}(3\sqrt{t}+\sqrt{3})}{\sqrt{t}(-2\sqrt{t}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | متوسط

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan^2 x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۴٪ | دشوار

ابتدا باید تعیین کنیم زمانی که x به سمت 2^- میل می‌کند، عبارت $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ به چه عددی میل می‌کند. با جای‌گذاری عدد ۲ به جای xهای صورت و مخرج به کسری می‌رسیم که صورت آن ۳ و مخرج آن صفر است. حال کافیست علامت صفر موجود در مخرج را تعیین کنیم که ملاحظه می‌شود در مخرج کسر با 0^- مواجه خواهیم بود.

بنابراین عبارت $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ زمانی که $x \to 2^-$، به $-\infty$ میل می‌کند، یعنی حد تابع f را در $-\infty$ باید محاسبه کنیم که جواب این حد برابر با ۱ خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۱

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۵٪ | متوسط

$$\lim_{x\to(-۳)^+} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-۳)^+} \frac{-x+۱}{(fof)(x)-۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

با توجه به نمودار: واضح است که در بی‌نهایت، تابع از مقادیر کم‌تر از ۲ به آن نزدیک می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

$(m-۱)$باید صفر شود، چون در غیر این‌صورت حاصل حد، بی‌نهایت خواهد شد (چرا؟).

$$m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{nx-۱}}{۳\sqrt{x+۲}+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{nx}}{۳\sqrt{x}} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{۳} = ۲ \Rightarrow \sqrt{n} = ۶ \Rightarrow n = ۳۶$$

$$\Rightarrow m+n = ۱+۳۶ = ۳۷$$

پاسخ: گزینه ۱ | گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۱% | دشوار

ابتدا حد تابع را وقتی $x\to-\infty$ بررسی می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲-\sqrt{x^۲+۳}}{ax^n+۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{x^۲}}{ax^n}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(-x)}{ax^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{ax^n}$$

حاصل حد برابر با $-\frac{۱}{۲}$ شده است، پس توان‌های صورت و مخرج باید برابر باشند که از آنجا مقدار $n=۱$ به دست می‌آید.

تقسیم ضرایب xهای صورت و مخرج کسر بر هم، جواب حد را می‌دهد یعنی $\frac{۱}{a} = -\frac{۱}{۲}$ ، که نتیجه می‌دهد $a=-۲$.

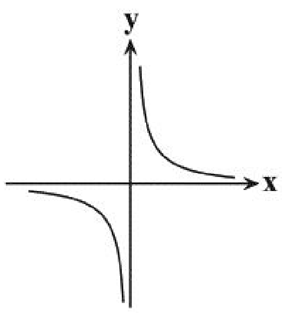
$$\Rightarrow a+n = -۲+۱ = -۱$$

پاسخ: گزینه ۲ | گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

گزینه «۲»

می‌دانیم: $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} = ۰$

با توجه به نمودار مشخص است که:



$$x\to-\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^۳\left[\frac{۱}{x}\right]+۶x^۲-۱}{۴x^۲-(۱+n)x^m+۵} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^۳+۶x^۲-۱}{۴x^۲-(۱+n)x^m+۵} = \frac{۳}{۲}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است، می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با هم برابرند.

لذا $m=۳$ بوده و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^۳+۶x^۲-۱}{-(۱+n)x^۳+۴x^۲+۵} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x^۳}{-(۱+n)x^۳} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{(۱+n)} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow n = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین: $mn=۱$

پاسخ: گزینه ۳ | سراسری ۱۴۰۱ | متوسط

$$\lim_{x\to ۱} (۴-۱)\times \frac{\sqrt{ax^۲+bx-c}}{x-۱} = ۶ \Rightarrow \sqrt{a^۲+bx+c}$$
$$= ۲(x-۱)$$

$$\lim_{x\Rightarrow +\infty} g(x) = \frac{۲(x-۱)}{x-۱} = ۲$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۶% | متوسط

طبق هم‌ارزی پرتوان از توان‌های کوچکتر در مقابل توان‌های بزرگتر باید صرف‌نظر کنیم.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-۴x+۱}+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt{-۲x-۲}-\sqrt[۳]{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-۴x+۱}+۱}{\sqrt{-۲x-۲}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-۴x}}{\sqrt{-۲x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{-۴x}{-۲x}} = \sqrt{۲}$$

پاسخ: گزینه ۴ | گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

با فرض $n \in N$ داریم:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{۲x^n+x^۲+۱}{۳x^n-x^۳+۳} = \begin{cases} \frac{۲}{۳} n > ۳ \\ ۱ n = ۳ \\ ۰ n < ۳ \end{cases}$$

دقت کنید در حالتی که $n = ۳$ است:

$$\text{حد} = \lim_{x\to \infty} \frac{۲x^۳+x^۲+۱}{۳x^۳-x^۳+۳} = \lim_{x\to \infty} \frac{۲x^۳}{۲x^۳} = ۱$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

ضابطه تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx}{۲x+۳-a} & ;x > a \\ \dfrac{bx}{a+۳} & ;x \le a \end{cases}$$

وقتی $x \to -\infty$، تابع تعریف نمی‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $a+۳ = ۰$ و در نتیجه $a = -۳$ است. بنابراین ضابطه تابع به‌صورت $f(x) = \frac{bx}{۲x+۶}$ و دامنه آن $(-۳, +\infty)$ است و همچنین در $+\infty$ مجانب افقی برابر $y = \frac{b}{۲}$ دارد $\left(\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{bx}{۲x} = \frac{b}{۲}\right)$. در نتیجه $\frac{b}{۲} = ۲$ و $b = ۴$ است.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

با توجه به نمودار مشخص است که $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = +\infty$ است.

حال داریم: $\lim_{x\to ۱^-} (fof)(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x)$

خط $y = ۰$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ است و مقادیر تابع f در $+\infty$ در بازه $(-۱,۰)$ قرار دارند. پس در $+\infty$ ، $[f(x)]$ با -۱ برابر است و داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} [(fof)(x)] = \lim_{x\to +\infty} [f(x)] = \lim_{x\to +\infty} -۱ = -۱$$

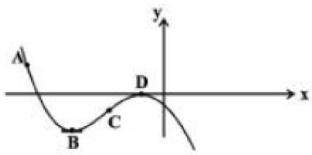
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۴ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۶۶% | ساده

۱) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. طول کدام نقطه در نابرابری $f(x) > f'(x)$ صدق می‌کند؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

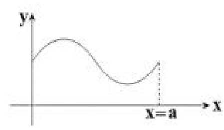
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

۲) اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(-x+h)}{x} = 2h^2$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

۳) در شکل مقابل با افزایش مقادیر x از $x = 0$ تا $x = a$، مقدار مشتق تابع چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش – کاهش
۲) افزایش – کاهش – افزایش
۳) کاهش – افزایش
۴) کاهش – افزایش – کاهش

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

۴) اگر مقدار مشتق و مقدار تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$، به‌ترتیب برابر ۳ و (۲-) باشد، حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۱۲- ۴) ۱۲

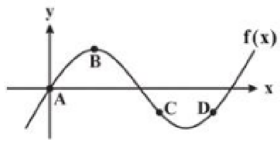
قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۳% | ساده

۵) خط $y = 4x + a$ بر نمودار تابع $y = x^2 - 2$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶- ۴) ۲-

ساده | درصد پاسخگویی ۳۶% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۶) در کدام نقطه روی نمودار، $f(x)f'(x) < 0$ است؟



۱) A

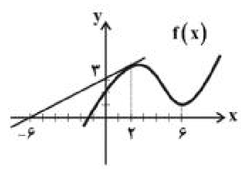
۲) B

۳) C

۴) D

ساده | درصد پاسخگویی ۳۴% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۷) با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ کدام است؟



۱) ۱

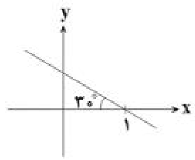
۲) $\frac{1}{2}$

۳) صفر

۴) ۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۰% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۱

۸) اگر نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{f(1)-f(x)}{x-1}$ کدام است؟



۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) $-\sqrt{3}$

۴) صفر

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۴% | قلم‌چی ۱۳۹۸

۹) اگر در توابع $f(x) = (x^2-1)(x+1)$ و $g(x) = x-2$ داشته باشیم: $f'(a)g(a) = f(a)g'(a)$، آن‌گاه مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۲-

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۰% | ساده

۱۰) اگر $f(x)=x\sqrt{\frac{۴}{x-۱}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) صفر

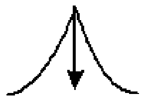
قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

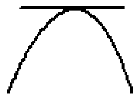
۱۱) هرگاه معادله‌ی خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی A به طول $x=۱$، $y=۲x+۱$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{۱}{f}$ در نقطه‌ای به‌طول $x=۱$ روی آن کدام است؟

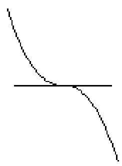
۱) $۹x-۲y=۱$ ۲) $۳y+۲x=۳$ ۳) $۹y+۲x=۵$ ۴) $۲x-۳y=۱$

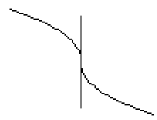
قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۷% | دشوار

۱۲) نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{x}}{x-۱}$ در حوالی $x=۰$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


خارج از کشور ۱۳۹۸ | متوسط

۱۳) تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

۱۴) اگر $f(x)=(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱})^۶$ و $g(x)=(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})^۵$ باشد، حاصل $f'g+g'f$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۲}$ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۷% | ساده

۱۵) اگر $f(۴)=۴$ ، $f'(۴)=-۵$ و $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ باشد، $g'(۴)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶۰% | ساده

۱۶) مشتق تابع $y=\frac{f(x)+x}{g(x)-۱}$ در نقطه $x=۲$ برابر -۲ است. اگر $g'(۲)=۰$ و $g(۲)=۲$ باشد، $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۸ ۳) ۵ ۴) ۷

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده

۱۷) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{۳}{\sqrt{۲x+۳}}$ از $x=۳$ تا $x=۱۱$، چند برابر آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر تابع $g(x)=\sqrt{x}$ در $x=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد؟

۱) -۱۰۰ ۲) $-\frac{۱}{۱۰۰}$

۳) -۲۰ ۴) $-\frac{۱}{۲۰}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۶% | قلمچی ۱۳۹۷

(۱۸) در تابعی با ضابطه $f(t) = t - \sqrt{t}$، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $t = ۴$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر آن از $t = ۱$ تا $t = ۴$، بیشتر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلمچی ۱۳۹۷

(۱۹) در تابع $f(x) = \sqrt{x+۲}$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[۲/۴۱, ۴/۲۵]$ با آهنگ آنی آن در لحظه $x = ۳/۲۹$ چقدر اختلاف دارد؟

۱) صفر
۲) $\frac{۹}{۲۳}$
۳) $\frac{۵}{۲۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۲۳}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۸% | قلمچی ۱۳۹۶

(۲۰) آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۹}{x^۲}$ در بازه‌ای ازا $x_۱ = ۱$ تا $x_۲ = ۱/۱$، چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در انتهای این بازه است؟

۱) ۱
۲) ۱/۱
۳) ۱/۱۵۵
۴) ۰/۹۵

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلمچی ۱۳۹۶

(۲۱) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{x+۳}$ در بازه‌ی $[۱, a]$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = ۲$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$
۲) $\frac{۱۷}{۴}$
۳) $\frac{۱۳}{۲}$
۴) $\frac{۱۷}{۲}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلمچی ۱۳۹۵

(۲۲) آهنگ لحظه‌ای تغییر محیط دایره نسبت به مساحت آن، هنگامی‌که محیط دایره ۶π است، کدام است؟

۱) ۶π
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۵% | قلمچی ۱۳۹۶

(۲۳) معادله‌ی حرکت متحرکی روی خط مستقیم به صورت $x(t) = ۳t^۲ - ۴t + ۲$ است. سرعت متوسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t = ۱$ تا $t = ۳$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۵% | قلمچی ۱۳۹۴

(۲۴) اگر سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۲ متر با معادله‌ی $f(t) = ۱۲ - ۵t^۲$به سمت پایین رها شود، سرعت متوسط آن در لحظات $t_۱ = ۱$ و $t_۲ = ۱ + h$ بر حسب h کدام است؟ ($h > ۰$ و f فاصله‌ی سنگ از زمین برحسب متر است.)

۱) $-۵h - ۱۰$
۲) $-۱۰ + ۵h$
۳) $۱۰h + ۵$
۴) $-۵ + ۱۰h$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۹% | قلمچی ۱۳۹۶

(۲۵) اگر تابع رشد یک باکتری به فرم $P(t) = ۳ \times ۱۰^۳ + ۱۰۰t^۲$ برحسب زمان(ساعت)باشد،آهنگ متوسط افزایش جمعیت این باکتری ،۲ساعت بعداز زمان شروع کشت کدام است؟

۱) ۱۵۰
۲) ۲۰۰
۳) ۲۲۵
۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۱ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۶۶% ساده

گزینه ی «۱»

وضعیت نقاط مشخص شده روی نمودار به صورت زیر است:

$A: f'(x) < 0, f(x) > 0$

$B: f'(x) = 0, f(x) < 0$

$C: f'(x) > 0, f(x) < 0$

$D: f'(x) = 0, f(x) = 0$

بنابراین فقط طول نقطه A در نابرابری $f(x) > f'(x)$ صدق می‌کند.

پاسخ: گزینه ۱ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۸% متوسط

نکته:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h} = (m-n)f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(h+x)-f(h-x)}{x} = 2f'(h) = 2h^2 \Rightarrow f'(h) = h^2$$

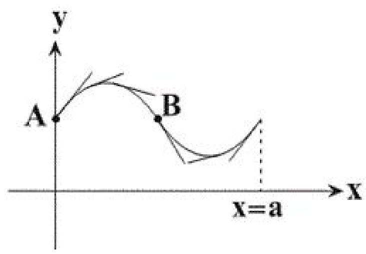
$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}f'(3) = \frac{1}{6}\times 9 = \frac{3}{2}$$

پاسخ: گزینه ۳ گزینه های دام دار ۲ قلم‌چی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۲۱% متوسط

گزینه «۳»

با توجه به شکل مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس است از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



پاسخ: گزینه ۳ قلم‌چی ۱۳۹۷ درصد پاسخگویی ۱۵% متوسط

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x\to 1} (f(x)+f(1))$$

$$= (f'(1))(2f(1)) = (3)(2(-2)) = -12$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۳% | ساده

راه حل اول:

$y = x^۲ - ۲ \Rightarrow y' = ۲x$

$x = ۲$: طول نقطه مماس $\Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow$ شیب خط مماس $= ۴$

$y = ۲$: عرض نقطه تماس $\xrightarrow{x=۲} y = x^۲ - ۲$

خط مماس : $y = ۴x + a \xrightarrow[y=۲]{x=۲} ۲ = ۸ + a \Rightarrow a = -۶$

راه حل دوم:

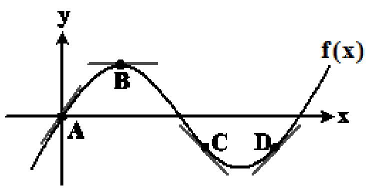
چون خط بر سهمی مماس است، معادله $x^۲ - ۲ = ۴x + a$ باید جواب مضاعف داشته باشد:

$\Rightarrow x^۲ - ۴x - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴a + ۲۴ = ۰ \Rightarrow a = -۶$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۶% | ساده

می‌دانیم $f'(x)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول x است. به جدول توجه کنید:

نقطه	f	f'	f(x)f'(x)
A	۰	+	۰
B	+	۰	۰
C	-	-	+
D	-	+	-



پس در نقطه D، $f(x)f'(x) < ۰$ است.

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = ۲$ برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است، پس $f'(۲) = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد. حال داریم:

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)-(f(۲-h)-f(۲))}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} + \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲-h)-f(۲)}{-h}$$

$$= ۲f'(۲) = ۱$$

نکته:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$$

پاسخ: گزینه ۲ | گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

گزینه «۲»

$\frac{f(۱)-f(x)}{} = -\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = -f'($

مشتق همان شیب خط مماس بر تابع است. اگر θ زاویه خط با جهت مثبت محور xها باشد، شیب خط برابر است با:

$\tan\theta = $ شیب خط $\Rightarrow \tan(۱۵۰^\circ) = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\Rightarrow f'(۱) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow -f'(۱) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۴% — متوسط

گزینه «۱»

$$f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = \left(\frac{f}{g}\right)'(a) \times g^{۲}(a) = ۰$$

حاصل‌ضرب دو عبارت زمانی صفر است که حداقل یکی از آن‌ها صفر شوند، دقت کنید که به‌ازای $g(a) = ۰$ تساوی صورت سؤال برقرار نمی‌شود. پس برای آن‌که $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = ۰$ رخ دهد، داریم:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^{۲}-۱)(x+۱)}{x-۲} = \frac{(x-۱)(x+۱)^{۲}}{(x-۲)}$$

$$y' = \frac{(۱(x+۱)^{۲}+۲(x-۱)(x+۱))(x-۲)-(x-۱)(x+۱)^{۲}}{(x-۲)^{۲}}$$

$$= \frac{(x+۱)(۲x^{۲}-۷x+۳)}{(x-۲)^{۲}}$$

به‌ازای $x = -۱, ۳, \frac{۱}{۲}$، مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = ۰$ می‌شود که در گزینه‌ها فقط $x = -۱$ موجود است.

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۴۰% — ساده

گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = f'(۲)$$

از $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{۴}{x-۱}} + (x)\left(\frac{\frac{-۴}{(x-۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۴}{x-۱}}}\right)$$

حال داریم:

$$f'(۲) = \sqrt{\frac{۴}{۱}} + (۲)\left(\frac{\frac{-۴}{(۱)^{۲}}}{۲\times\sqrt{۴}}\right) = ۲ + (۲)\left(\frac{-۴}{۴}\right) = ۲ - ۲ = ۰$$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۸% — دشوار

از خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی به‌طول (۱) خواهیم داشت:

مماس $m = f'(۱) = ۲$ و $y(۱) = f(۱) = ۳$

با توجه به این اطلاعات معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{۱}{f}$ در نقطه‌ی A' به‌طول (۱) را می‌یابیم. ابتدا عرض نقطه را می‌یابیم.

$$y(۱) = \left(\frac{۱}{f}\right)(۱) = \frac{۱}{f(۱)} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow A'\left(۱, \frac{۱}{۳}\right)$$

حال شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$y' = \left(\frac{-f'}{f^{۲}}\right)(x) \Rightarrow y'(۱) = -\frac{f'(۱)}{f^{۲}(۱)} = -\frac{۲}{۳^{۲}} = \frac{-۲}{۹}$$

پس معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{۱}{f}$ در A' برابر است با:

$$y - \frac{۱}{۳} = \frac{-۲}{۹}(x-۱) \Rightarrow ۹y - ۳ = -۲x + ۲ \Rightarrow ۹y + ۲x = ۵$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۷% | دشوار

مشتق تابع در $x = 0$ را با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم:

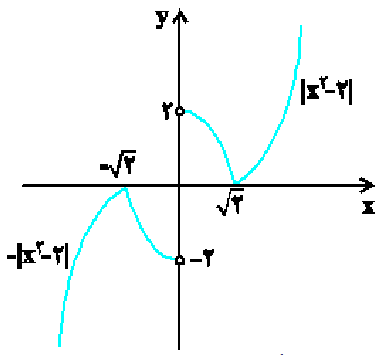
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(x-1)} = -\infty$$

چون مشتق تابع مقداری منفی دارد، پس تابع در حوالی $x = 0$ نزولی است (رد گزینه‌های «۱» و «۲»). از طرفی چون مشتق ∞ شده، خط مماس عمودی است، در نتیجه گزینه «۴» صحیح است.

پاسخ: گزینه ۳ | خارج از کشور ۱۳۹۸ | متوسط

گزینه۳

$$f(x) = \frac{|x||x^2-2|}{x} = |x^2-2|\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -|x^2-2| & ;x<0 \\ |x^2-2| & ;x>0 \end{cases}$$



مطابق نمودار فوق، واضح است که ریشه‌های عبارت $2 - x^2$، جزو نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f هستند. تابع در $x = 0$ ناپیوسته است، بنابراین در این نقطه نیز مشتق ندارد.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

عبارت خواسته‌شده، مشتق تابع fg است:

$$\Rightarrow (fg)(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^6(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$$

$$= ((\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2)^5(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$$

$$= 1(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$$

$$\Rightarrow (fg)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۷% | ساده

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=4} g'(4) = \frac{4f'(4) - f(4)}{16} = \frac{4(-5)-4}{16} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶۰% | ساده

$$y' = \frac{(f'(x)+1)(g(x)-1) - g'(x)(f(x)+x)}{(g(x)-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(2)+1)(g(2)-1) - g'(2)(f(2)+2)}{(g(2)-1)^2} = -2$$

$$\xrightarrow[g'(۲)=۰]{g(۲)=۲} (f'(۲)+۱) = -۲ \Rightarrow f'(۲) = -۳$$

پاسخ: گزینه ۴ 　 قلم‌چی ۱۳۹۶ 　 درصد پاسخگویی ۳۴% 　 ساده

آهنگ متوسط تغییر تابع f از نقطه $x = ۳$ تا $x = ۱۱$ برابر است با:

$$a = \frac{f(۱۱)-f(۳)}{۱۱-۳} = \frac{\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۳}}{۸} = -\frac{۱}{۲۰}$$

و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $g(x) = \sqrt{x}$ در $x = \frac{۱}{۴}$ برابر است با:

$$b == \lim_{x\to\frac{۱}{۴}} \frac{\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}}{x-\frac{۱}{۴}} = \lim_{x\to\frac{۱}{۴}} \frac{(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})}{(x-\frac{۱}{۴})(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۱}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{۱}{۲۰}$$

پاسخ: گزینه ۴ 　 قلم‌چی ۱۳۹۷ 　 درصد پاسخگویی ۴۶% 　 ساده

ابتدا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را در $t = ۴$ به‌دست می‌آوریم که همان $f'(۴)$ است.

$$f(t) = t - \sqrt{t} \Rightarrow f'(t) = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{t}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۳}{۴}$$

از طرفی برای آهنگ متوسط تغییر نیز داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه } [۱,۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{۲-۰}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

پاسخ: گزینه ۱ 　 قلم‌چی ۱۳۹۷ 　 درصد پاسخگویی ۲۶% 　 متوسط

آهنگ متوسط یک تابع بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{آهنگ متوسط}: \frac{f(۴/۲۵)-f(۲/۴۱)}{۴/۲۵-۲/۴۱} = \frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴/۴۱}}{۱/۸۴}$$

$$= \frac{۲/۵-۲/۱}{۱/۸۴} = \frac{۰/۴}{۱/۸۴} = \frac{۴۰}{۱۸۴} = \frac{۵}{۲۳}$$

و آهنگ لحظه‌ای تابع در هر نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است. پس:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'(۳/۲۹) = \frac{۱}{۲\times\sqrt{۵/۲۹}} = \frac{۱}{۲\times۲/۳} = \frac{۱}{۴/۶}$$

$$= \frac{۱۰}{۴۶} = \frac{۵}{۲۳}$$

در نتیجه اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای موردنظر برابر صفر است:

$$\frac{۵}{۲۳} - \frac{۵}{۲۳} = ۰$$

پاسخ: گزینه ۳ 　 قلم‌چی ۱۳۹۶ 　 درصد پاسخگویی ۸% 　 دشوار

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{f(۱/۱)-f(۱)}{۱/۱-۱}$$

$$= \frac{\frac{۹}{۱/^۲}-\frac{۹}{۱^۲}}{۰/۱} = \frac{۹(\frac{۱^۲-۱/^۲}{۱\times۱/})}{۰/۱} = \frac{-۹\times۲/۱}{۱/}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-۹\times۲}{x^۳} \Rightarrow f'(۱/۱) = \frac{-۹\times۲}{۱/}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار مورد نظر سؤال} = \frac{\frac{-۹\times۲/۱}{۱/}}{\frac{-۹\times۲}{۱/}} = \frac{۲/۱\times۱/۱}{۲} = ۱/۱۵۵$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(a)-f(۱)}{a-۱} = \frac{\frac{۲a+۱}{a+۳}-\frac{۳}{۴}}{a-۱} = \frac{\frac{۸a+۴-۳a-۹}{۴(a+۳)}}{a-۱}$$

$$= \frac{۵a-۵}{۴(a-۱)(a+۳)} = \frac{۵(a-۱)}{۴(a-۱)(a+۳)} = \frac{۵}{۴(a+۳)}$$

$$x = ۲ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۲x+۱}{x+۳}-۱}{(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۲x+۱-x-۳}{x+۳}}{(x-۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)}{(x+۳)(x-۲)} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴(a+۳)} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow a = \frac{۱۳}{۴}$$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

ابتدا ضابطه‌ی محیط دایره را برحسب مساحت آن می‌نویسیم و از آن نسبت به مساحت مشتق می‌گیریم:

$$S = \pi r^۲ \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (۱)$$

$$P = ۲\pi r \xrightarrow{(۱)} P(S) = ۲\sqrt{\pi} \times \sqrt{S}$$

$$\Rightarrow P'(S) = ۲\sqrt{\pi} \times \frac{۱}{۲\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

اگر محیط برابر ۶πباشد، مساحت را به‌دست می‌آوریم:

$$P = ۲\pi r = ۶\pi \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow S = \pi r^۲ = \pi(۳)^۲ = ۹\pi$$

$$P'(S) = \sqrt{\frac{\pi}{S}} \xrightarrow{S=۹\pi} P'(۹\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{۹\pi}} = \frac{۱}{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{x(۳)-x(۱)}{۳-۱}$$

$$= \frac{(۳(۳)^۲-۴(۳)+۲)-(۳-۴+۲)}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h} = \frac{۱۲-۵(۱+h)^۲-(۱۲-۵)}{h}$$

$$= \frac{-۱۰h-۵h^۲}{h} = -۱۰-۵h$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

توجه داشته باشید لحظه ی شروع کشت یعنی $t_۰ = ۰$.

$$P(t) = ۳ \times ۱۰^۳ + ۱۰۰t^۲$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\text{نمو تابع}}{\text{نمو متغیر}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t_۱)-P(t_۰)}{t_۱-t_۰}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(۲)-P(۰)}{۲-۰} = \frac{\left(۳\times ۱۰^۳+۱۰۰(۲)^۲\right)-}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{۴۰۰}{۲} = ۲۰۰$$

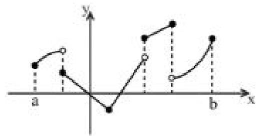
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۵ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

۱) شکل مقابل نمودار تابع در بازه $[a, b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۸% | ساده

۲) تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} + ax^۲ + ۳x + b$ در نقاط متمایزی به طول‌های $x = ۱$ و $x = c$ دارای اکسترمم نسبی است. حاصل ac کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۲-　　۳) ۴-　　۴) ۶-

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۳) در تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{۸ - x}$ نسبت ماکزیمم مطلق تابع به می‌نیمم مطلق آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $۲\sqrt{۲}$　　۳) ۲　　۴) ۳

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده

۴) اگر نقطه $A(۳,۶)$ اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^۲ - ۳}{ax+b}$ باشد، آن‌گاه حاصل $b - a$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۳　　۳) ۳-　　۴) ۱

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۱% | ساده

۵) تابع f با ضابطه $f(x) = x^۳ + ax^۲ + x$ همواره صعودی است، تغییرات a کدام است؟

۱) $۰ \le a < ۲$　　۲) $-\sqrt{۳} \le a < ۲$　　۳) $|a| \le \sqrt{۳}$　　۴) $|a| \le ۲$

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

۶) به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $۲x^۳ - ۳x^۲ + m = ۰$ دارای سه جواب متمایز است؟

۱) $۰ < m < ۱$　　۲) $۱ < m < ۲$
۳) $۲ < m < ۳$　　۴) $۳ < m < ۴$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۶% | متوسط

۷) به ازای کدام مقدار a، منحنی تابع $f(x) = ax^۳ - ۶x^۲ + x + ۱$ نقطهٔ بحرانی دارد، اما فاقد اکسترمم نسبی است؟

۱) ۲　　۲) $\frac{۹}{۲}$　　۳) ۱۲　　۴) ۸

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

۸) تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & x \geq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

۹) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , \quad |x| \leq 1 \\ x + |x| & , \quad |x| > 1 \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر باشد، حاصل $2a + b + 4c$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

۱۰) به ازای کدام مقدار a می‌نیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^3+a}{x^2}$ برابر یک است؟

۱) $\frac{1}{27}$
۲) $\frac{2}{27}$
۳) $\frac{4}{27}$
۴) $\frac{8}{27}$

گزینه های دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

۱۱) می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل با ضخامت معین و در باز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد. ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۱۵
۴) ۸

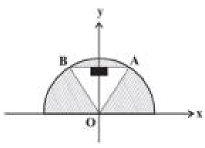
قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

۱۲) استوانه‌ای را درون یک کره با شعاع $3\sqrt{2}$ محاط کرده‌ایم، به‌طوری‌که مساحت جانبی آن ماکزیمم گردد. شعاع قاعدهٔ استوانه کدام است؟

۱) ۶
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) ۳

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

۱۳) مثلث OAB مطابق شکل در داخل منحنی $y = \sqrt{2 - x^2}$ محاط شده است، به گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی منحنی قرار دارد. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کمترین مقدار ممکن باشد، اندازه میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟

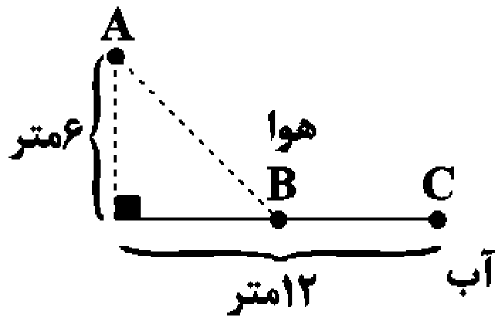


۱) ۱
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۱% | متوسط

(۱۴)

مرغ دریایی در نقطه A قرار گرفته و قصد دارد به نقطه C برود. برای این‌کار، قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب، مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری بر متر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری بر متر انرژی مصرف کند، فاصله نقطه B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کم‌ترین انرژی ممکن را مصرف کند؟



۱) ۳
۲) ۹
۳) ۴
۴) ۶

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

(۱۵)

می‌خواهیم یک استوانه قائم بسازیم که حجم آن برابر ۵۴π باشد. شعاع قاعده استوانه چه‌قدر باشد تا مساحت کل آن مینیمم شود؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

سراسری ۱۴۰۱ | متوسط

(۱۶)

از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازه$۳\sqrt{۳}$حول خط L به‌دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیش‌ترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است.)

۱) ۶   ۲) ۳   ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ۱۳۹۸ | نسبتا دشوار

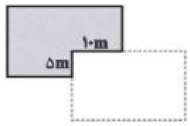
(۱۷)

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{۱۲ - x}$، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶   ۴) ۱۸

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

(۱۸)
بخش رنگی مساحت مدرسه‌ای را نشان می‌دهد. مدیر مدرسه می‌خواهد با کشیدن دیواری به طول ۱۲۵ متر (مانند نقطه‌چین داخل شکل) قسمتی مستطیل شکل به مدرسه اضافه کند. حداکثر مساحت اضافه شده به مدرسه چقدر است؟



۱) ۱۲۳۵
۲) ۱۲۱۵
۳) ۱۳۲۵
۴) ۱۲۲۵

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

(۱۹)
بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش با عرض مثبت روی سهمی $y = 8 - 2x^2$ باشد، کدام است؟

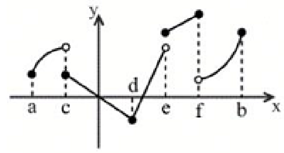
۱) $\frac{64\sqrt{3}}{9}$ **۲)** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$
۳) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$ **۴)** $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

(۲۰)
با سیمی به طول ۲۰ سانتی‌متر، ذوزنقه متساوی‌الساقینی می‌سازیم به‌طوری که طول بزرگ‌ترین قاعدهٔ آن برابر ۸ سانتی‌متر باشد. اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه را چند سانتی‌متر در نظر بگیریم تا ذوزنقه بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد؟

۱) $2\sqrt{3}$ **۲)** ۴ **۳)** $3\sqrt{2}$ **۴)** $2\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۳۵% — ساده



در نقطه به طولc، عرض تابع از نقاط در همسایگی چپ کمتر و در همسایگی راست بیشتر است، پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست، به دلیل مشابهe نیز اکسترمم نسبی نیست، اما درf، عرض تابع از نقاط در همسایگی خود بیشتر است، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.، به‌طریق مشابه در نقطه به طولd تابع می‌نیمم نسبی دارد و در کل دو اکسترمم نسبی دارد.

پاسخ: گزینه ۴ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۴۸% — ساده

گزینهٔ «۴»

می‌دانیم در تابع مشتق‌پذیر$y = f(x)$، اگر تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه طول آن نقطه باید در معادله $f'(x) = ۰$ صدق کند یعنی $f'(a) = ۰$ باشد. پس:

$$f(x) = \frac{x^۳}{۳} + ax^۲ + ۳x + b \Rightarrow f'(x) = x^۲ + ۲ax + ۳$$

$$f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۲a + ۴ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

$$f'(c) = ۰ \Rightarrow c^۲ + ۲ac + ۳ = ۰ \xrightarrow{a=-۲} c^۲ - ۴c + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \\ c = ۳ \end{cases}$$

چون دو نقطه$x = ۱$ و $x = c$ باید متمایز باشند بنابراین تنها $c = ۳$ قابل قبول است پس:

$$a = -۲ , c = ۳ \Rightarrow ac = (-۲) \times ۳ = -۶$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۲۷% — متوسط

دامنه‌ی تابع برابر$[۰,۸]$ است. مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم تا نقاط بحرانی را بیابیم.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۱}{۲\sqrt{۸-x}} = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{۸ - x} \Rightarrow x = ۸ - x$$

$$\Rightarrow x = ۴$$

مقادیر $f(۰)$ و $f(۸)$ و $f(۴)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(۰) = f(۸) = \sqrt{۸} \text{ و } f(۴) = ۴$$

پس داریم: $\frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{۴}{\sqrt{۸}} = \sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۳۴% — ساده

گزینهٔ «۳»

چون نقطه $A(۳,۶)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است، پس اولاً باید مختصات نقطه A در تابع صدق کند و ثانیاً باید مشتق در نقطه A صفر شود.

$$y = \frac{x^۲-۳}{ax+b} \xrightarrow{A(۳,۶)} ۶ = \frac{۹-۳}{۳a+b} \Rightarrow ۳a + b = ۱$$

$$y' = \frac{۲x(ax+b) - a(x^۲-۳)}{(ax+b)^۲} \xrightarrow{x=۳} y'(۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۶(۳a + b) - ۶a = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰$$

$$\begin{cases} ۳a + b = ۱ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ , b = -۲ \Rightarrow b - a = -۳$$

پاسخ: گزینه ۳ — ساده | درصد پاسخگویی ۳۱٪ | قلم‌چی ۱۳۹۷

در توابع چندجمله‌ای، در هر بازه‌ای که $y' \geq 0$ باشد، تابع همواره صعودی است، لذا:

$$y = x^3 + ax^2 + x$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

عبارت درجه دوم $a'x^2 + b'x + c'$ وقتی نامنفی است که $a' > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، لذا: $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 3 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ — دشوار | درصد پاسخگویی ۸٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴

برای این که یک تابع درجه‌ی سوم، سه ریشه‌ی متمایز داشته باشد، اولاً باید دارای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد و ثانیاً حاصل ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن منفی باشد.

فرض کنیم: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ در این صورت خواهیم داشت:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = m \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m(m-1) < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

پاسخ: گزینه ۳ — متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینهٔ «۳»

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1$$

باید $f'(x)$ ریشه داشته باشد، اما تغییر علامت ندهد، یعنی مشتق ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + 1 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف}} 144 - 4(3a) = 0$$

$$12a = 144 \Rightarrow a = 12$$

پاسخ: گزینه ۳ — متوسط | درصد پاسخگویی ۲۳٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۲

گزینهٔ «۳»

دامنه تابع $(-\infty, 1]$ است. پس $x = 1$ بحرانی است. به علاوه تابع در $x = 0$ پیوسته نیست. پس $x = 0$ هم بحرانی است.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{1-x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2 - x) = 0$$

در $x = 0$ ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

حالا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x < 0 \\ \frac{-2}{2\sqrt{1-x}} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

در $x = -\frac{1}{2}$ هم مشتق صفر می‌شود و نقطه بحرانی محسوب می‌شود. پس نقاط بحرانی تابع $x = 0$، $x = 1$ و $x = -\frac{1}{2}$ هستند.

پاسخ: گزینه ۴ — متوسط | درصد پاسخگویی ۲۰٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴

داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+c & , \quad |x|\le ۱ \\ x+|x| & , \quad |x|>۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\begin{cases} ۰ & , \quad x<-۱ \\ ax^۲+bx+c & , \quad -۱\le x\le ۱ \\ ۲x & , \quad x>۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۰ & , \quad x<-۱ \\ ۲ax+b & , \quad -۱<x<۱ \\ ۲ & , \quad x>۱ \end{cases}$$

برای این که تابع f روی R مشتق‌پذیر باشد، لازم است در نقاط $x=\pm۱$ مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته باشد.

$x=۱$ شرط پیوستگی در $\Rightarrow a+b+c=۲ \qquad (۱)$

$x=-۱$ شرط پیوستگی در $\Rightarrow a-b+c=۰ \qquad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow a+c=۱(۳)$

$x=۱$ شرط مشتق‌پذیری در $\Rightarrow ۲a+b=۲ \qquad (۴)$

$x=-۱$ شرط مشتق‌پذیری در $\Rightarrow -۲a+b=۰ \qquad (۵)$

$\Rightarrow ۲a+b+۴c=۴ \quad (۴),(۵) \Rightarrow b=۱, a=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۳)} c=\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

مجانب قائم: $D_f=R-\{۰\}, x=۰$

$f(x)=x+\frac{a}{x^۲} \Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۲a}{x^۳}=۰$

$\Rightarrow x^۳=۲a \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲a}$

x	۰		$\sqrt[۳]{۲a}$		$+\infty$
y′		−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	$f(\sqrt[۳]{۲a})$ min	↗	$+\infty$

$\Rightarrow f(\sqrt[۳]{۲a})=۱$

$\Rightarrow \frac{۳a}{\sqrt[۳]{۴a^۲}}=۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{۴a^۲}=۳a \Rightarrow ۴a^۲=۲۷a^۳$

$\xrightarrow{a\neq ۰} a=\frac{۴}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه های دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

با توجه به حجم قوطی، رابطه بین ارتفاع و شعاع استوانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$V=\pi r^۲h \Rightarrow \pi r^۲h=۳۰۰۰ \xrightarrow{\pi=۳} r^۲h=۱۰۰۰ \Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{r^۲}$

طبق صورت سؤال، باید مساحت کل استوانه موردنظر کم‌ترین مقدار ممکن گردد.

$S=$ مساحت کل استوانه = مساحت قاعده + مساحت جانبی $=\pi r^۲+۲\pi rh$

با جایگذاری ارتفاع برحسب شعاع، داریم:

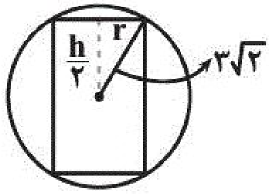
$S=\pi r^۲+\pi(\frac{۲۰۰۰}{r})=\pi(r^۲+\frac{۲۰۰۰}{r})$

اگر مشتق مساحت برحسب شعاع را برابر با صفر قرار دهیم، شعاع مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow 2r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow h = 10$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵٪ | دشوار



$$\begin{cases} \frac{h^2}{4} + r^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = \sqrt{72 - 4r^2} \\ S = 2\pi rh = 2\pi r\left(\sqrt{72 - 4r^2}\right) \end{cases}$$

حال نقطهٔ بحرانی تابع S را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow S' = 0 \Rightarrow S' = 2\pi\sqrt{72 - 4r^2} - \frac{16\pi r^2}{2\sqrt{72-4r^2}} = 0$$

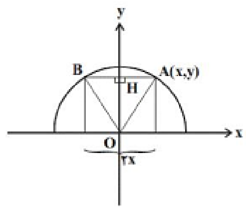
$$S' = \frac{4\pi(72-4r^2) - 16\pi r^2}{2\sqrt{72-4r^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{r=3}$$

بنابراین شعاع قاعدهٔ استوانه باید ۳ باشد تا مساحت جانبی استوانه ماکزیمم شود.

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۹٪ | دشوار

با توجه به ثابت بودن کل مساحت محصور بین منحنی و محور xها، برای آن که مساحت قسمت هاشور خورده، کمترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB، بیشترین باشد.



اگر مختصات رأس A از مثلث را (x,y) در نظر بگیریم، قاعده مثلث (AB) برابر 2x و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با: $S = \frac{1}{2}(AB)(OH) = \frac{1}{2}(2x)(y) = xy$

S را به صورت تابعی از x می‌نویسیم:

$$S(x) = x\sqrt{2 - x^2}$$

نقاط بحرانی تابع S را می‌یابیم:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 1 \times \sqrt{2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} \times x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2-x^2) - x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow[\text{مختصاتاست}]{\text{در ربع اول A}} x = 1$$

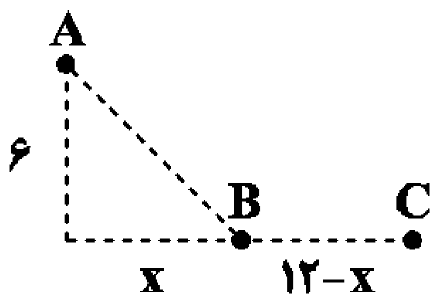
$$\Rightarrow OH = y = \sqrt{2 - x^2} \xrightarrow{x=1} y = 1$$

حال از آن جا که در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، مقدار میانه نیز برابر ۱ خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۱٪ | متوسط

ابتدا معادله انرژی مصرفی را نوشته و سپس نقطه مینیمم نسبی آن‌را به‌دست می‌آوریم:



انرژی صرف شده در مسیرABC: $f(x) = \sqrt{۳۶ + x^۲} \times ۱۰\sqrt{۵} + (۱۲ - x) \times ۱۰$

$f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{۳۶+x^۲}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (-۱۰) = ۰$

$\frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{۳۶+x^۲}} = ۱ \Rightarrow ۳۶ + x^۲ = ۵x^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۳$

درنتیجه: $\Rightarrow x \in [۰,۱۲] \Rightarrow x = ۳$

$BC = ۱۲ - ۳ = ۹$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۸% — متوسط

گزینه «۳»

$V = \pi r^۲ h = ۵۴\pi \Rightarrow h = \frac{۵۴}{r^۲}$

حال ضابطه مساحت کل استوانه را برحسب r می‌نویسیم و سپس نقطه بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم: $S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲ = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۵۴}{r^۲})$

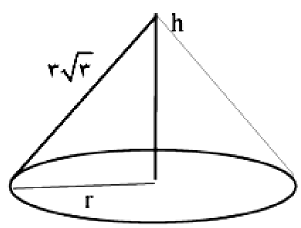
$S = ۲\pi r^۲ + \frac{۱۰۸\pi}{r} \Rightarrow S' = ۴\pi r - \frac{۱۰۸\pi}{r^۲}$

$\Rightarrow S' = \frac{۴\pi r^۳ - ۱۰۸\pi}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۴\pi r^۳ - ۱۰۸\pi = ۰$

$\Rightarrow r^۳ = \frac{۱۰۸}{۴} = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$

پاسخ: گزینه ۲ — سراسری ۱۴۰۱ — متوسط

گزینه «۲»

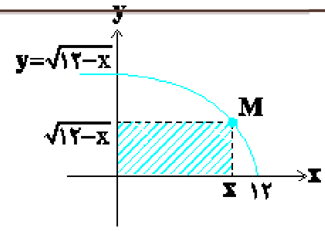


$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$

$v' = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow h = ۳$

پاسخ: گزینه ۳ — کنکور سراسری ۱۳۹۸ — نسبتا دشوار

گزینه ۳



طول مستطیل برابر x $(۰ < x < ۱۲)$ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{۱۲-x}$ می‌باشد. پس مساحت مستطیل برابر است با: $S(x) = x\sqrt{۱۲-x}$

حال از تابع مساحت مشتق گرفته و نقطه بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم:

$$S'(x) = \sqrt{۱۲-x} + \frac{-x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = \frac{۲۴-۲x-x}{۲\sqrt{۱۲-x}}$$

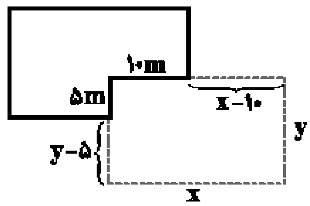
$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۲۴ - ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۸$$

پس به ازای $x = ۸$ مستطیل بیش‌ترین مساحت را دارد. $S(۸) = ۸\sqrt{۴} = ۱۶$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۱۸٪ — متوسط

گزینه «۴»

طول دیوار کشیده شده با توجه به شکل برابر است با:



$$y + (y - ۵) + x + (x - ۱۰) = ۱۲۵$$

$$\Rightarrow ۲y + ۲x = ۱۴۰ \Rightarrow y + x = ۷۰$$

$$y = ۷۰ - x \Rightarrow S = xy = x(۷۰ - x)$$

$$\Rightarrow S(x) = ۷۰x - x^۲ \xrightarrow[\text{وبرابرصفرقرارمیدهیم}]{\text{از} \quad \text{مشتق گرفته}} S'(x) = ۷۰ - ۲x = ۰$$

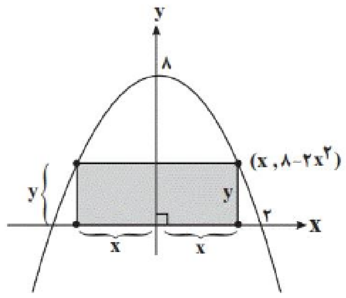
$$\Rightarrow x = ۳۵$$

$$\Rightarrow S(۳۵) = ۳۵(۷۰ - ۳۵) = ۳۵^۲ = ۱۲۲۵$$

x		۳۵	
S′	+	۰	−
	↗	max	↘

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۱۹٪ — متوسط

گزینه «۱»

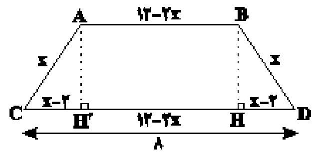


$$S_{\text{مستطیل}} = ۲xy = ۲x(۸ - ۲x^۲) = -۴x^۳ + ۱۶x$$
$$\Rightarrow S'_{\text{مستطیل}} = -۱۲x^۲ + ۱۶ = ۰$$
$$x^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow x = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad , \quad y = ۸ - ۲(\frac{۴}{۳}) = \frac{۱۶}{۳}$$
$$S_{max} = ۲xy = ۲(\frac{۲}{\sqrt{۳}})(\frac{۱۶}{۳}) \Rightarrow S_{max} = \frac{۶۴\sqrt{۳}}{۹}$$

پاسخ: گزینه ۱ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۲% متوسط

گزینهٔ «۱»

ابتدا شکل ذوزنقه را می‌کشیم و داده‌های مسئله را روی آن پیاده می‌کنیم. اگر طول ساق‌های ذوزنقه را برابر x فرض کنیم، داریم:



$$\begin{cases} \text{طول سیم-محیط ذوزنقه} = ۲۰ \\ \text{طول قاعده کوچکتر} = ۲۰ - (۸ + x + x) = ۱۲ - ۲x \\ AB = HH' = ۱۲ - ۲x \\ DH = CH' = \frac{۸-(۱۲-۲x)}{۲} = \frac{۲x-۴}{۲} = x - ۲ \end{cases}$$

حال در مثلث BHD با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ارتفاع BH را محاسبه می‌کنیم:

$$BD^۲ = BH^۲ + DH^۲ \Rightarrow BH = \sqrt{x^۲ - (x-۲)^۲}$$
$$= \sqrt{۴x - ۴}$$
$$\Rightarrow BH = ۲\sqrt{x - ۱} \quad (*)$$

مساحت ذوزنقه را محاسبه می‌کنیم:

$$S(x) = \frac{(AB+CD)\times BH}{۲} = \frac{((۱۲-۲x)+۸)\times ۲\sqrt{x-۱}}{۲}$$
$$= (۲۰ - ۲x)\sqrt{x - ۱}$$

حال برای اینکه ذوزنقه بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد، باید از $S(x)$ مشتق گرفته و نقطهٔ بحرانی را به‌دست آوریم:

$$S'(x) = -۲\sqrt{x - ۱} + \frac{۲۰-۲x}{۲\sqrt{x-۱}} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۲\sqrt{x - ۱} = \frac{۲۰-۲x}{۲\sqrt{x-۱}}$$
$$\Rightarrow (۲\sqrt{x-۱})^۲ = ۲۰ - ۲x \Rightarrow ۴x - ۴ = ۲۰ - ۲x \Rightarrow ۶x = ۲۴$$
$$\Rightarrow x = ۴$$

اکنون برای به‌دست آوردن ارتفاع ذوزنقه طبق رابطهٔ * داریم:

$$BH = ۲\sqrt{x - ۱} \xrightarrow{x=۴} BH = ۲\sqrt{۳}$$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ریاضی ۳ - فصل ۶ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

ساده | درصد پاسخگویی ۳۴% | قلمچی ۱۴۰۰

۱

در بیضی با خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ و طول قطر کوچک ۱۲ واحد، مجموع فواصل نقطه‌ای روی بیضی از دو کانون کدام است؟

۱) ۱۲
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۳}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلمچی ۱۳۹۷

۲

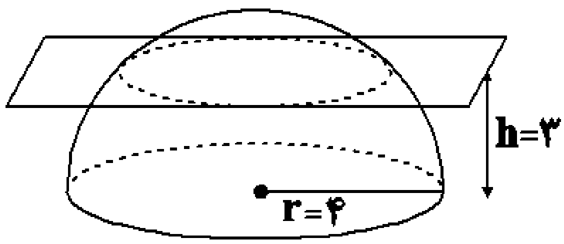
اگر صفحه P، کره‌ای به شعاع R را در فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز کره قطع کند و مساحت سطح مقطع حاصل ۱۸π باشد، شعاع کره کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$
۲) $۲\sqrt{۶}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۴\sqrt{۶}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۸% | قلمچی ۱۳۹۸

۳

مطابق شکل، یک نیم‌کره به شعاع ۴ = r را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله ۳ = h از آن قطع می‌کنیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

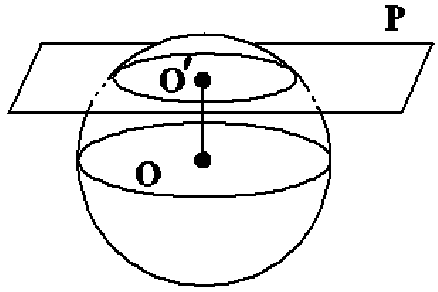


۱) ۷π
۲) π
۳) $\frac{۱۶π}{۹}$
۴) ۱۲π

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلم‌چی ۱۴۰۰

۴

در شکل زیر، حاصل تقاطع صفحهٔ P با کره‌ای به شعاع ۲، دایرهٔ C است. اگر ۱ = OO′ باشد، نسبت مساحت دایرهٔ C به محیط آن کدام است؟ (O′ و O به‌ترتیب مرکز دایرهٔ C و کره هستند.)



۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

۴) ۲

دشوار | درصد پاسخگویی ۳% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۵

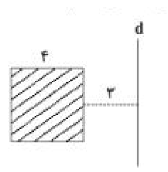
اگر(۱,۲) = O مرکز و (۵, ۲) = F یکی از کانون‌های بیضی‌ای باشد که از نقطه‌ی (۴, ۳) = M عبور می‌کند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۳۰% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۶

مربعی به ضلع ۴ واحد را حول محوری موازی یکی از اضلاع و به فاصله ۳ واحد از آن دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟



۱) 156π

۲) 160π

۳) 169π

۴) 196π

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۷

محیط سطح مقطع حاصل از تقاطع یک صفحه با کره‌ای به شعاع R برابر 6π است. اگر فاصله مرکز کره از این صفحه برابر ۴ باشد، مساحت کره کدام است؟

۱) 36π

۲) 64π

۳) 84π

۴) 100π

ساده | درصد پاسخگویی ۵۳% | قلم‌چی ۱۳۹۸

۸

یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یکی از ضلع‌های قائمه‌اش دوران می‌دهیم. سطح مقطع حاصل از برخورد شکل حاصل با صفحه P کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) بیضی ۲) سهمی

۳) دایره ۴) مستطیل

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۷٪ | ساده

۹
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول ضلع AB برابر ۸ واحد است. این مثلث را حول ضلع AB، ۳۶۰° دوران می‌دهیم تا یک شکل فضایی به حجم ۹۶π تولید شود. طول وتر BC کدام است؟

۱) ۱۲
۲) $۶\sqrt{۳}$
۳) ۱۰
۴) $۸\sqrt{۲}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۶٪ | متوسط

۱۰
طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس آن ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۲۹٪ | متوسط

۱۱
شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ(۰ , ۰)، (۱ , ۲) و(۲- , ۱)، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲٪ | دشوار

۱۲
معادله‌ی تمام قائم‌های رسم شده بر دایره به‌صورت $y = m(x-y)+۱$ است. اگر دایره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، محور xها را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

۱) $-۳ , ۵$
۲) $۳ , -۱$
۳) $-۱ \pm ۳\sqrt{۲}$
۴) $-۱ \pm ۲\sqrt{۳}$

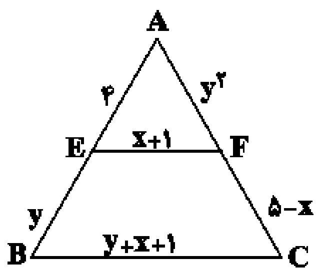
قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

۱۳
دایره‌ای به مرکز$O(۳ , -\frac{۳}{۲})$و شعاع $\frac{۵}{۲}$محورxها را در نقاط Nو Mقطع می‌کند. طول پاره خط MNکدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

کنکور سراسری ۱۴۰۰ | متوسط

۱۴
در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y-۲x$، کدام است؟



۱) ۴-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۶٪ | متوسط

۱۵
به‌ازای کدام مقدار a دایره‌ای به معادله $x^۲+y^۲+۲x-۴y+a=۰$ بر خط به معادله $۴x-۳y=۵$ مماس است؟

۱) ۳-
۲) ۴-
۳) ۳
۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴٪ | متوسط

۱۶
اگر از نقطه $A(a, -۱)$ بتوانیم بر دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ دو مماس رسم کنیم، محدوده a کدام است؟

۱) $a \in [-۱, ۳]$
۲) $a \in [-۱, ۴]$
۳) $a \in -[-۱, ۳]$
۴) $a \in R-[-۱, ۴]$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۵% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱۷) شعاع دایره کوچک‌تر که از نقطه $A(1,2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۴

متوسط | درصد پاسخگویی ۳۱% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱۸) دو دایره $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ و $x^2+y^2-2x=0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) متخارج ۲) مماس داخل

۳) متقاطع ۴) مماس خارج

دشوار | درصد پاسخگویی ۹% | قلم‌چی ۱۴۰۰ | گزینه های دام دار ۲

۱۹) خط $x+y+1=0$ دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و شعاع $\sqrt{10}$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $(0,-1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,-2)$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۶

۲۰) نقطهٔ $(1,2)$ مرکز دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+2by+2=0$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

ساده | درصد پاسخگویی ۳۴% | قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینهٔ «۴»

مجموع فواصل هر نقطهٔ روی بیضی از دو کانون برابر با طول قطر بزرگ بیضی یعنی ۲a است. طبق اطلاعات مسأله، خروج از مرکز برابر با $\frac{۱}{۲}$ است:

$$e = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \rightarrow c = \frac{a}{۲}$$

همچنین قطر کوچک ۱۲ = ۲b است، پس ۶ = b. بنابراین:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{c=\frac{a}{۲}} a^۲ = ۳۶ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳a^۲}{۴} = ۳۶ \Rightarrow a^۲ = ۴۸$$

$$\xrightarrow{a>۰} a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۲a = ۸\sqrt{۳}$$

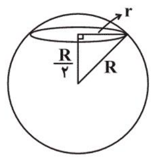
پاسخ: گزینه ۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلم‌چی ۱۳۹۷

$$r^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۴} = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

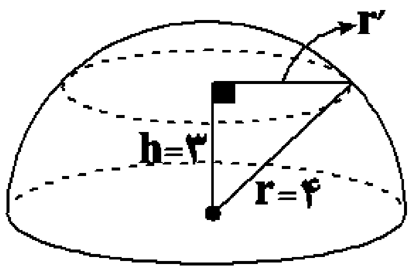
$$S = \pi r^۲ = \frac{۳}{۴}\pi R^۲ = ۱۸\pi \quad \text{(سطح مقطع)}$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۲۴ \Rightarrow R = ۲\sqrt{۶}$$



پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۸% | قلم‌چی ۱۳۹۸



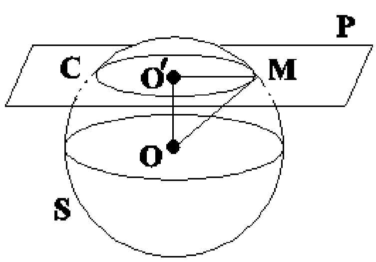
مطابق شکل، طبق قضیه فیثاغورس، به راحتی می‌توانیم شعاع دایره مقطع را حساب کنیم. $r' = \sqrt{۴^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۷}$

پس مساحت دایره حاصل برابر است با: $S = \pi r'^۲ = ۷\pi$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینهٔ «۲»



$OM^{2} = OO'^{2} + O'M^{2} \Rightarrow 4 = 1 + O'M^{2}$

$\Rightarrow O'M = \sqrt{3} = r$ شعاع دایرهٔ C :

بنابراین:

$$\frac{\text{مساحت دایره C}}{\text{محیط دایره C}} = \frac{\pi r^{2}}{2\pi r} = \frac{r}{2} \xrightarrow{r=\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳٪ | دشوار

با توجه به این‌که مرکز بیضی، دقیقاً وسط دو کانون آن قرار دارد، پس در صورتی‌که F' کانون دیگر بیضی باشد، داریم:

$$x_O = \frac{x_F + x_{F'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{5 + x_{F'}}{2} \Rightarrow x_{F'} = -3$$

$$y_O = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{2 + y_{F'}}{2} \Rightarrow y_{F'} = 2$$

از طرفی $MF + MF' = 2a$، پس داریم:

$$MF = \sqrt{(5-4)^{2} + (2-3)^{2}} = \sqrt{2}$$

$$MF' = \sqrt{(-3-4)^{2} + (2-3)^{2}} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین $2a = 6\sqrt{2}$ و در نتیجه $a = 3\sqrt{2}$. از طرفی $OF = c$، پس $c = 4$ و خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

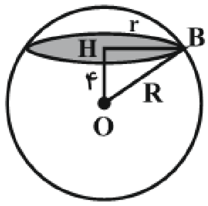
پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۰٪ | متوسط

شکل حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۷ و ارتفاع ۴ واحد می‌باشد که درون آن استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ واحد و با همین ارتفاع خالی شده است. پس حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V = \pi \times (7)^{2} \times (4) - \pi \times (3)^{2} \times (4) = 4\pi(49 - 9) = 160\pi$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | متوسط

گزینه «۴»



شعاع دایره سطح مقطع را r می‌نامیم، داریم:

$2\pi r =$ محیط سطح مقطع

$\Rightarrow 6\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 3$

بنابه قضیه فیثاغورس در مثلث OBH داریم:

$$R^{2} = r^{2} + OH^{2} \Rightarrow R^{2} = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5$$

حال: $S = 4\pi R^{2} = 4\pi \times 5^{2} = 100\pi$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۳٪ | ساده

شکل حاصل از دوران ... ی از ضلع‌های قائمه‌اش، مخروط ...

اگر صفحهٔ مایلی مخروط را قطع کرده ولی قاعدهٔ آن را قطع نکند، شکل حاصل بیضی است.

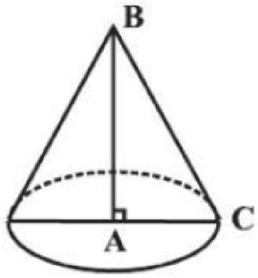
اگر صفحهٔ مایلی به موازات یال مخروط آن را قطع کرده و از رأس مخروط عبور نکند، شکل حاصل سهمی است.

اگر صفحه‌ای عمود بر محور مخروط، آن را قطع کند و از رأس مخروط عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۳۷٪ — ساده

گزینهٔ «۳»

شکل فضایی تولید شده یک مخروط است که در آن ضلع $AB = ۸$ ارتفاع و ضلع $AC = R$ شعاع دایرهٔ قاعده است.



$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow ۹۶\pi = \frac{۱}{۳}\pi . AC^۲ \times ۸$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۳۶$$

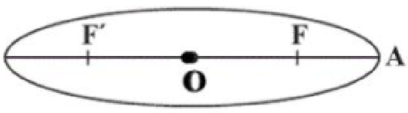
$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

نکته: وتر BC را که حول AB دوران می‌کند و مخروط را تولید می‌نماید، مولد مخروط می‌نامند.

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۶٪ — متوسط

گزینهٔ «۱»

مطابق شکل فرضی داریم:



$$۲b = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲}$$

$$FA = ۲ \Rightarrow a - c = ۲ \quad (I)$$

طبق رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$، داریم:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow b^۲ = (a-c)(a+c)$$

$$b^۲ = ۲(a+c) \Rightarrow ۸ = ۲(a+c) \Rightarrow a + c = ۴ \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \begin{cases} a - c = ۲ \\ a + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ c = ۱ \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۲۹٪ — متوسط

گزینهٔ «۱»

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{(۰,۰) را صدق می دهیم}} c = ۰ \\ \xrightarrow{\text{(۲,۱) را صدق می دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ a - ۲b = -۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

حال با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۲٪ — دشوار

تمام قائم‌های رسم شده بر دایره از مرکز دایره می‌گذرند. پس با دادن دو مقدار دلخواه به m و یافتن نقطه‌ی تلاقی، مرکز دایره(O)را می‌یابیم:

$$\begin{cases} m = ۰ \Rightarrow y = ۱ \\ m = ۱ \Rightarrow y = x - y + ۱ \xrightarrow{y=۱} ۱ = x - ۱ + ۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

چون دایره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است، بنابراین:

$$A(۰, ۳) \in \text{دایره} \Rightarrow OA = R \Rightarrow R = \sqrt{(۰ - ۱)^۲ + (۳ - ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره}: (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۵$$

برای یافتن طول نقاط تلاقی با محور xها، $y = ۰$ قرار می‌دهیم.

$$(x - ۱)^۲ + ۱ = ۵ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۱ = -۲ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۱۲٪ — متوسط

$$(x - ۳)^۲ + (y + \tfrac{۳}{۲})^۲ = \tfrac{۲۵}{۴} \xrightarrow{y=۰} (x - ۳)^۲ + \tfrac{۹}{۴} = \tfrac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow (x - ۳)^۲ = \tfrac{۱۶}{۴} = ۴ \Rightarrow x - ۳ = \pm ۲ \Rightarrow x_N = ۱, x_M = ۵$$

$$\Rightarrow NM = ۵ - ۱ = ۴$$

پاسخ: گزینه ۱ — کنکور سراسری ۱۴۰۰ — متوسط

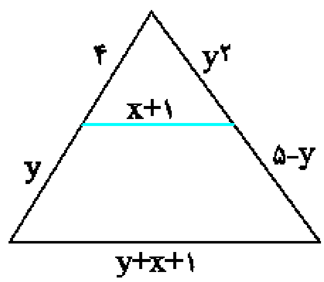
گزینه «۱»

با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{۴}{y+۴} = \frac{x+۱}{y+x+۱}$$

$$\rightarrow ۴y + ۴x + ۴ = xy + ۴x + y + ۴$$

$$\Rightarrow ۳y = xy \xrightarrow{y \neq ۰} x = ۳$$



همچنین داریم:

$$\frac{۴}{y} = \frac{y^۲}{۵-x}$$

$$\xrightarrow{x=۳} \quad ۴ \quad y^۲ \quad y^۳ = ۸ \Rightarrow y = ۲$$

مطلوب سؤال برابر است با:

$y - ۲x = ۲ - ۲(۳) = -۴$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۲۶% — متوسط

شعاع دایره داده شده $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ - ۴a} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰ - ۴a} = \sqrt{۵ - a}$

و مرکز دایره $(-۱,۲)$ می‌باشد و چون خط $۴x - ۳y = ۵$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط $۴x - ۳y = ۵$ مساوی شعاع دایره است. پس فاصله نقطه $(-۱,۲)$ را از خط $۴x - ۳y - ۵ = ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$R = \frac{|-۴-۶-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$

از طرفی $r = \sqrt{۵ - a}$ پس: $\sqrt{۵ - a} = ۳ \Rightarrow ۵ - a = ۹ \Rightarrow a = -۴$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۴% — متوسط

گزینه «۳»

برای رسم دو مماس باید نقطه خارج از دایره قرار بگیرد. یعنی $f(A) > ۰$ باشد.

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰ \xrightarrow{f(a,-۱)>۰} a^۲ + (-۱)^۲ - ۲a$
$+ ۴(-۱) > ۰$

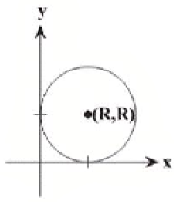
$a^۲ - ۲a - ۳ > ۰ \Rightarrow (a - ۳)(a + ۱) > ۰ \Rightarrow a > ۳$ یا $a < -۱$

$\Rightarrow a \in R - [-۱, ۳]$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۵% — متوسط

گزینه «۲»

معادله دایره‌هایی که بر هر دو محور مختصات در ربع اول مماس‌اند:



$(x - R)^۲ + (y - R)^۲ = R^۲$

چون دایره از نقطه A گذشته، پس مختصات نقطه A را در آن جاگذاری می‌کنیم:

$(۱ - R)^۲ + (۲ - R)^۲ = R^۲ \Rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} R = ۱ \\ R = ۵ \end{cases}$

دایره کوچک تر: $(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$

دایره بزرگ تر: $(x - ۵)^۲ + (y - ۵)^۲ = ۲۵$

$\Rightarrow$ شعاع دایره کوچک تر = ۱

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۱% — متوسط

گزینه «۳»

دو دایره ...

$$x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲-۴+(y-۲)^۲-۴+۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} O_۱=(۲,۲) \\ R_۱=۲ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۲x=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲-۱+y^۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} O_۲=(۱,۰) \\ R_۲=۱ \end{cases}$$

حال فاصله مرکز دو دایره از هم را محاسبه می‌کنیم:

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

با توجه به شعاع دایره‌ها:

$\Rightarrow |R_۲-R_۱|<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$ دو دایره متقاطع‌اند.

پاسخ: گزینه ۴ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

گزینهٔ «۴»

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع $\sqrt{۱۰}$ به صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۱۰$$

برای یافتن نقاط تلاقی این دایره با خط $x+y+۱=۰$ کافی است $y=-x-۱$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری کنیم:

$$(x-۲)^۲+(-x)^۲=۱۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۴+x^۲=۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=۰ \to A(-۱,۰) \\ x=۳ \Rightarrow y=-۴ \to B(۳,-۴) \end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با

$$M=\frac{A+B}{۲}=(۱,-۲)$$

روش دوم: خط عمود بر خط $x+y+۱=۰$ که از مرکز دایره بگذرد را با خط قطع می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع وسط A و B است.

خطی که از مرکز دایره $(۲,-۱)$ بر این خط $(x+y=-۱)$ عمود شود قطعاً از وسط وتر می‌گذرد. پس: $x-y=\ \ k=۳$ $\begin{cases} y=x-۳ \\ y=-x-۱ \end{cases} \to \begin{cases} x=۱ \\ y=-۲ \end{cases}$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

با توجه به معادلهٔ دایره، مختصات مرکز دایره برابر است با:

$$O(-\tfrac{a}{۲},\tfrac{-۲b}{۲}) \Rightarrow O(-\tfrac{a}{۲},-b)$$

چون نقطهٔ $(۱,۲)$مرکز دایره است، بنابراین:

$$(-\tfrac{a}{۲},-b)=(۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=-۲ \\ -b=۲ \Rightarrow b=-۲ \end{cases}$$

معادلهٔ دایره:$x^۲+y^۲-۲x-۴y+۲=۰$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲-۱+(y-۲)^۲-۴+۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۳ \Rightarrow R=\sqrt{۳}$$

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

۱) اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری‌که $P(B|A)=\frac{1}{3}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $P((A-B)|B)=\frac{2}{3}$ ۲) $P((A-B)|A)=\frac{2}{3}$ ۳) $P(A|(B-A))=\frac{2}{3}$ ۴) $P(A|(A-B))=\frac{1}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

۲) از مجموعه {۹۹ , ... , ۱۲ , ۱۱ , ۱۰}، عددی به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از ارقام این عدد۷ است، احتمال این‌که دهگان این عدد۷ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{11}{18}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

۳) احتمال اصابت تیر به هدف برای یک تیرانداز، $\frac{1}{6}$ است. با کدام احتمال از ۳ تیر رها شده، حداقل یک تیر به هدف اصابت می‌کند؟

۱) $\frac{125}{216}$ ۲) $\frac{91}{216}$
۳) $\frac{1}{216}$ ۴) $\frac{1}{6}$

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

۴) اگر $P(A-B)=0/2$ و $P(B)=0/4$ باشد، آنگاه $P(A'|B')$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۵) در یک مسابقه فوتبال، احتمال اینکه یک بازیکن مصدوم نشود و تا پایان مسابقه بازی کند برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه بازیکن مصدوم شود ۰/۱ است. اگر بدانیم یک بازیکن مصدوم نشده است، با چه احتمالی تا انتهای بازی در زمین بوده است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{7}{9}$

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

۶) دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و در دومی ۷ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه است، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم، آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{11}{27}$
۳) $\frac{34}{81}$ ۴) $\frac{7}{17}$

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

۷) اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را روی پنج کارت می‌نویسیم و به تصادف دو کارت از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگر حاصل‌ضرب اعداد روی کارت‌ها از مجموع آن‌ها بیش‌تر باشد، با کدام احتمال دو عدد متوالی انتخاب شده است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۱% | ساده

۸) در پرتاب دو تاس سالم می‌دانیم مجموع اعداد دو تاس عددی فرد است. احتمال این‌که حاصل‌ضرب دو عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{7}{18}$

متوسط | درصد پاسخگویی ٪۲۶ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۱

۹) در پرتاب دو تاس سالم اگر هیچ کدام ۵ نیامده باشد، با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده بر ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{5}{36}$ ۳) $\frac{3}{25}$ ۴) $\frac{4}{25}$

متوسط | درصد پاسخگویی ٪۱۷ | قلم‌چی ۱۳۹۶

۱۰) دو کیسه داریم که در اولی ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در دومی ۴ مهره‌ی سفید و۲ مهره‌ی سیاه موجود است. از هر کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این ۶مهره همرنگ هستند؟

۱) $\frac{1}{25}$ ۲) $\frac{1}{175}$ ۳) $\frac{3}{25}$ ۴) $\frac{3}{175}$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

در گزینهٔ «۲» داریم:

$$P((A-B)|A)=\frac{P((A-B)\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A-B)}{P(A)}$$
$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
$$\xrightarrow{P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}1-P(B|A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

تشریح گزینه‌های دیگر:

$$1)\ P((A-B)|B)=\frac{P((A-B)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$
$$3)\ P(A|(B-A))=\frac{P(A\cap(B-A))}{P(B-A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B-A)}=\frac{0}{P(B-A)}=0$$
$$4)\ P(A|(A-B))=\frac{P(A\cap(A-B))}{P(A-B)}=\frac{P(A-B)}{P(A-B)}=1$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

فضای نمونه کاهش یافته شامل تمام اعداد دو رقمی است که حداقل یکی از ارقام آن‌ها برابر ۷ است. اگر این فضای نمونه را با S_1 نمایش دهیم، داریم:

$S_1=\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 87, 97\}$

$\cup\ \{70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79\}$

اگر در این فضای نمونه کاهش‌یافته، پیشامد آن که رقم دهگان عدد انتخابی برابر ۷ باشد را با A نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$A=\{70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79\}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S_1)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

اگر پیشامد A را اصابت حداقل یک تیر به هدف در نظر بگیریم، آن‌گاه پیشامد A' آن است که هیچ تیری به هدف برخورد نکند. داریم:

$$P(A')=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$
$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

پاسخ: گزینه ۴ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

گزینهٔ «۴»

$$P(B)=0/4\Rightarrow P(B')=1-0/4=0/6$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=(P(A)-P(A\cap B))+P(B)$$
$$=P(A-B)+P(B)=0/2+0/4=0/6$$

$$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)=0/4$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{0/4}{0/6}=\frac{2}{3}$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

بازیکن مصدوم شود=A′ و بازیکن مصدوم نشود = A $\Rightarrow P(A') = ۰/۱$

$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$

تا انتها بازی کند = B

$A \cap B$: بازیکن مصدوم نشود و تا انتها بازی کند $\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۷$

احتمال داده شده برابر است با:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۰/۷}{۰/۹} = \frac{۷}{۹}$$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

گزینه «۳»

به روش نمودار درختی عمل می‌کنیم:

احتمال برداشتن مهره از ظرف اولی و گذاشتن آن در ظرف دوم $\begin{cases} \text{سفید} & \frac{۵}{۹} \\ \text{سیاه} & \frac{۴}{۹} \end{cases}$

برداشتن مهره از ظرف دوم:

- اگر مهره گذاشته شده سفید باشد: سفید $\frac{۸}{۱۸}$ ، سیاه $\frac{۱۰}{۱۸}$
- اگر مهره گذاشته شده سیاه باشد: سفید $\frac{۷}{۱۸}$ ، سیاه $\frac{۱۱}{۱۸}$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۹} \times \frac{۸}{۱۸} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۷}{۱۸} = \frac{۳۴}{۸۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A: انتخاب دو عدد متوالی $A = \{\{۱,۲\},\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\}\}$

B: حاصل‌ضرب اعداد روی کارت‌ها از مجموع آن‌ها بیش‌تر باشد.

$B = \{\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}\}$

درنتیجه: $A \cap B = \{\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\}\}$.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۱% | ساده

گزینه «۳»

اگر مجموع اعداد دو تاس عددی فرد باشد، عدد یک تاس زوج و عدد تاس دیگر فرد ظاهر شده، پس فضای نمونه کاهش یافته دارای ۱۸ عضو است:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{فرد - زوج}) & \Rightarrow ۳ \times ۳ = ۹ \\ (\text{زوج - فرد}) & \Rightarrow ۳ \times ۳ = ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow ۹ + ۹ = ۱۸$$

پیشامد مطلوب آن است که در بین دو تاس حتماً ۳ یا ۶ ظاهر شود که شامل ۱۰ حالت زیر است:

{(۳ , ۲) , (۳ , ۴) , (۳ , ۶) , (۲ , ۳) , (۴ , ۳) , (۶ , ۳) ,
... (۶ , ۵) , (۱ , ۶) , (۵ , ۶)}

احتمال موردنظر $= \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow$

پاسخ: گزینه ۳

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۶% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۱

هر تاس ۵ حالت دارد. در نتیجه $n(S) = ۵ \times ۵ = ۲۵$، حالت‌هایی را که جمع دو تاس ۸ می‌شود، می‌نویسیم:

$A = \{(۴,۴),(۲,۶),(۶,۲)\}$

$n(A) = ۳$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۷% | قلم‌چی ۱۳۹۶

چون تعداد مهره‌های سیاه در کیسه‌ی دوم، کمتر از ۳ است، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر کیسه، ۳ مهره‌ی سفید خارج شود. داریم:

$$\frac{\binom{۳}{۳}\times\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}\binom{۶}{۳}} = \frac{۴}{۳۵\times ۲۰} = \frac{۱}{۱۷۵}$$