نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۱ - زمان دار**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۱% | متوسط

۱) نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، سپس آن را ۳ واحد در جهت محور x به طرف چپ انتقال می‌دهیم و در انتها در جهت محور yها با ضریب ۴ منبسط می‌کنیم. ضابطه تبدیل کدام است؟

۱) $y = ۴f(-x+۳)$ ۲) $y = \frac{۱}{۴}f(-x+۳)$ ۳) $y = ۴f(-x-۳)$ ۴) $y = \frac{۱}{۴}f(-x-۳)$

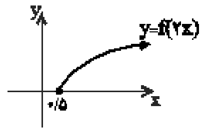
قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

۲) اگر نقطه $(۲x_۰, y_۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار داشته باشد، کدام نقطه روی تابع $y = -۲f\left(\frac{x-۳}{۲}\right)+y_۰$ قرار دارد؟

۱) $(۴x_۰+۳, y_۰)$ ۲) $(۴x_۰+۳, -y_۰)$ ۳) $\left(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, -y_۰\right)$ ۴) $\left(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, y_۰\right)$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

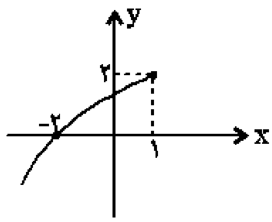
۳) اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع $y = f(۲x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، زوج مرتب (a , b) کدام می‌تواند باشد؟

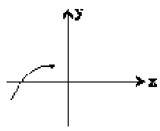


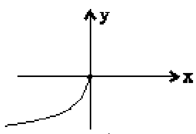
۱) $(۲ , -۴)$ ۲) $(۱ , -۱)$
۳) $(-۱ , ۱)$ ۴) $(۴ , -۲)$

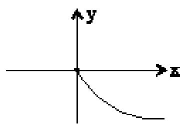
قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۲% | ساده

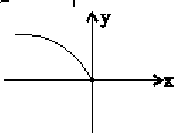
۴) شکل زیر نمودار تابع f را نشان می‌دهد. نمودار تابع $g(x) = f^{-۱}(x+۲)-۱$ کدام است؟



۱) 

۲) 

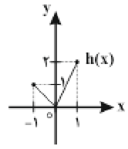
۳) 

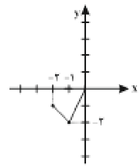
۴) 

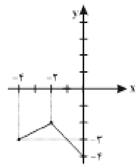
ساده | درصد پاسخگویی ۶۸% | قلم‌چی ۱۳۹۷

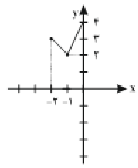
⑤

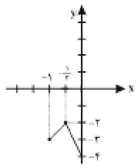
نمودار تابع $h(x) = f(x-1) - 2$ مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع $-f\left(\frac{x}{2}\right)$ را به‌درستی نشان می‌دهد؟



۱) 

۲) 

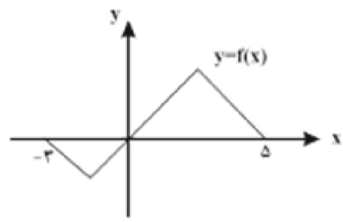
۳) 

۴) 

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۲% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۱ - ۴

⑥

اگر شکل زیر تابع $y = f(x)$ را نشان دهد، دامنه تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{xf\left(-\frac{x}{2}\right)}$ کدام است؟



۱) $[-10, 6]$
۲) $[0, 6]$
۳) $\{-10, 0, 6\}$
۴) $\{0\}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۵% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۴

⑦

با اعمال موارد کدام گزینه به‌ترتیب، نمودار تابع $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}f(1-x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محورxها وyها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محورxها وyها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی
۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محورxها وyها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محورxها وyها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

ساده | درصد پاسخگویی ۳۲% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۱

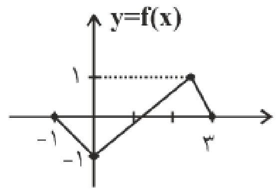
⑧

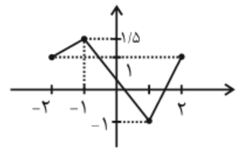
نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محورyها قرینه کنیم، سپس آن را ۲ واحد در جهت محور xها به‌طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضریب ۲ آن را در راستای عمودی انبساط دهیم، کدام تابع به‌دست می‌آید؟

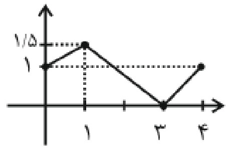
۱) $g(x) = 2f(-x-2)$
۲) $g(x) = 2f(-x+2)$
۳) $g(x) = \frac{1}{2}f(-x-2)$
۴) $g(x) = \frac{1}{2}f(-x+2)$

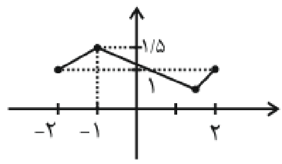
قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۴% | ساده

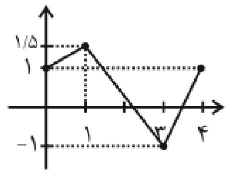
۹) نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار $y=-\frac{1}{2}f(x+1)+1$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۰% | ساده

۱۰) نمودار تابع $f(x)=x^3$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به‌دست آید. ضابطه تابع g کدام است؟

۱) x^3-3x^2+3x
۲) x^3+3x^2+3x+2
۳) x^3-3x^2-3x
۴) x^3+3x^2+3x

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

۱۱) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-x-6 کدام است؟

۱) $\frac{x-7}{5}$
۲) $\frac{7-x}{5}$
۳) $-\frac{x+7}{5}$
۴) $\frac{x+7}{5}$

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

۱۲) اگر تابع f با دامنه R اکیداً صعودی باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله $f(a-2)>f(a^2-2a)$ کدام است؟

۱) $-4<a<2$
۲) $1<a<2$
۳) $3<a<4$
۴) $-1<a<2$

کنکور سراسری ۱۴۰۰ | نسبتا دشوار

۱۳) تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$بر $P'(x)$(مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب ۲- و $\frac{1}{2}x+1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

۱۴) طول بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\frac{\sin x+|\sin x|}{2}$ روی آن نزولی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) $\frac{3\pi}{2}$
۴) 2π

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

۱۵) اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(1)=0$ باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی شمار

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۰% | ساده

۱۶) اگر $f(x)=x^3-3x^2+3x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟

۱) $(0,\infty)$
۲) R
۳) $R-\{0\}$
۴) $[0,\infty)$

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

۱۷) اگر تابع f نسبت به محورyها متقارن و در بازه‌ی $[0\,,\,2]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه تابع $-f$ در بازه‌ی $[-2\,,\,0]$ چگونه است؟

۱) اکیداً نزولی
۲) اکیداً صعودی
۳) ابتدا صعودی و بعد نزولی
۴) ابتدا نزولی و بعد صعودی

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

۱۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنه‌ی $\{x : |x-1|<2\}$، همواره چگونه است؟

۱) منفی
۲) مثبت
۳) صعودی
۴) نزولی

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

۱۹) باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت تعریف‌شده‌ی $(\frac{x^2+1}{x+2}-2)\div\frac{x+1}{x^2+2x}$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) -2
۲) ۲
۳) ۳
۴) -3

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۲۰) تابع $f(x)=\sin(-2x)$ در بازهٔ $(-a,a)$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) π
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{6}$
۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۳ | گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۱٪ | متوسط

گزینه «۳»

$g=f(x)\xrightarrow{x\to -x} y=f(-x)\xrightarrow{x\to x+۳}$

$y=f(-(x+۳))=f(-x-۳)\xrightarrow{f\to ۴f} ۴f(-x-۳)$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۹٪ | ساده

$(۲x_{\circ},y_{\circ})\in f(x)\Rightarrow f(۲x_{\circ})=y_{\circ}$

$\Rightarrow \frac{x-۳}{۲}=۲x_{\circ}\Rightarrow x-۳=۴x_{\circ}\Rightarrow x=۴x_{\circ}+۳$

$y=-۲f\left(\frac{x-۳}{۲}\right)+y_{\circ}\Rightarrow y=-۲f(۲x_{\circ})+y_{\circ}$

$=-۲y_{\circ}+y_{\circ}=-y_{\circ}$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷٪ | متوسط

از آنجا که $f(\frac{۲x}{۲})=f(x)$ است، با دو برابر کردن طول نقاط تابع $y=f(۲x)$، نمودار تابع$f(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین:

بنابراین دامنه تابع $f(x)$ بازه $[۱,+\infty)$ است. از طرفی دامنه تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ برابر است با:

$ax+b\geq \circ \Rightarrow ax\geq -b$

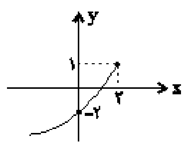
$\xrightarrow{a\text{مثبت}} x\geq \frac{-b}{a} D_f=[\frac{-b}{a},+\infty)$

بنابراین $\frac{-b}{a}=۱$ و در نتیجه $a=-b$ است. توجه کنید چونa مثبت است، پس گزینه (۲) صحیح است.

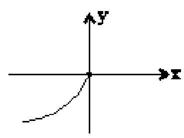
پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | ساده

گزینهٔ «۲»

ابتدا نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ را رسم می‌کنیم، برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم:



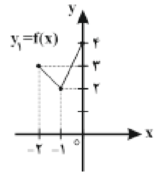
حال نمودار بالا را ۲ واحد به چپ و یک واحد به پایین می‌بریم و مطابق شکل زیر نمودار تابع g حاصل می‌شود.



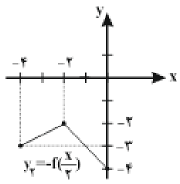
پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۶۸٪ | ساده

ابتدا باید نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ کافی است نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

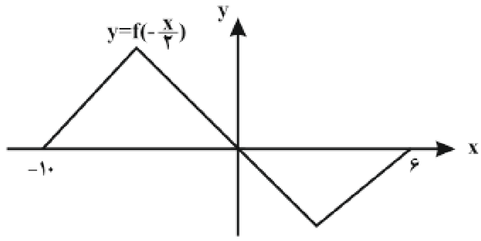


پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۱ - ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

گزینه «۳»

ابتدا از روی $f(x)$ نمودار $f(-x)$ را رسم کرده و سپس در راستای افقی آن را ۲ برابر منبسط می‌کنیم تا $f\left(-\frac{x}{2}\right)$ به‌دست آید.



حال دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf\left(-\frac{x}{2}\right)}$ را می‌یابیم:

$$xf\left(-\frac{x}{2}\right) \ge 0$$

	-10		0		6
x		$-$	0	$+$	
$f\left(-\frac{x}{2}\right)$	0	$+$	0	$-$	0
$xf\left(-\frac{x}{2}\right)$	0	$-$	0	$-$	0

$$\Rightarrow D_g = \{-10, 0, 6\}$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۴۵٪ | ساده

گزینه «۲»

$$f(x) \xrightarrow[\text{به‌سمت‌چپ}]{\text{انتقال یک واحدی}} f(x+1)$$

$$f(x+1) \xrightarrow[\text{به‌محور } y\text{ها}]{\text{انعکاس نسبت}} f(-x+1)$$

$$f(1-x) \xrightarrow[\text{...}]{\text{انعکاس نسبت}} -f(1-x)$$

$$-f(1-x) \xrightarrow[\text{واحدی ۱۴}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{1}{4}f(1-x)$$

پاسخ: گزینه ۲ | ساده | درصد پاسخگویی ۳۲% | قلمچی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۱

با انجام مراحل بیان شده در سؤال داریم:

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال ۲ واحد به طرف راست}} y=f(-(x-2))=f(-x+2)$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} y=2f(-x+2)$$

پاسخ: گزینه ۳ | ساده | درصد پاسخگویی ۵۴% | قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۳»

چون به x یک واحد اضافه شده است ابتدا تابع را یک واحد به طرف چپ می‌بریم، سپس عرض همه نقاط آن را در $-\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم (نمودار جدید در راستای محور yها به اندازه $\frac{1}{2}$ منقبض می‌گردد)، سپس قرینه آن را نسبت به محور xها بدست می‌آوریم و در انتها نیز نمودار حاصل را به اندازه یک واحد در راستای محور yها بالا می‌بریم، در نتیجه نمودار گزینه «۳» حاصل می‌گردد.

پاسخ: گزینه ۱ | ساده | درصد پاسخگویی ۵۰% | قلمچی ۱۳۹۹

نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=(x-1)^3$ و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x)=(x-1)^3+1$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow g(x)=(x-1)^3+1=x^3-3x^2+3x-1+1$$

$$=x^3-3x^2+3x$$

پاسخ: گزینه ۴ | متوسط | درصد پاسخگویی ۲۳% | قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-x-6 را به صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$f(x)=(x-3)(x+2)q(x)+ax+b$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ نیز برابر $f(a)$ است. حال با جای‌گذاری $x=-2$ و $x=3$ در قضیه تقسیم بالا داریم:

$$\begin{cases} x=-2 \ : f(-2)=0-2a+b=1 \Rightarrow b-2a=1 & (1) \\ x=3 \ : f(3)=0+3a+b=2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a=\frac{1}{5} \text{ و } b=\frac{7}{5}$$

پس باقی‌مانده موردنظر $r(x)=\frac{x+7}{5}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ | ساده | درصد پاسخگویی ۳۹% | قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

می‌دانیم اگر f تابعی صعودی اکیداً باشد، می‌توان از نامعادله $f(u)>f(v)$ نتیجه گرفت که $u>v$ است.

$$f(a-2)>f(a^2-2a) \Rightarrow a-2>a^2-2a$$

$$\Rightarrow a^2-3a+2=(a-1)(a-2)<0 \Rightarrow 1<a<2$$

پاسخ: گزینه ۳ | کنکور سراسری ۱۴۰۰ | نسبتا دشوار

گزینه «۳»

چند جمله‌ای $p(x)$ را به صورت $p(x) = ax^{۲} + bx + c$ در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow P'(x) = ۲ax + b$$

قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^{۲} + bx + c = \underbrace{(۲ax + b)}_{\text{مقسوم علیه}}\underbrace{(\tfrac{۱}{۲}x + ۱)}_{\text{خارج قسمت}}\underbrace{-۲}_{\text{باقی مانده}}$$

$$\Rightarrow ax^{۲} + bx + c = ax^{۲} + (۲a + \tfrac{b}{۲})x + b - ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۲a + \dfrac{b}{۲} \Rightarrow b = ۴a \\ c = b - ۲ \xrightarrow{b=۴a} c = ۴a - ۲ \end{cases} \qquad \Rightarrow p(x) = ax^{۲} + (۴a)x + ۴a - ۲$$

مجموع ضرایب $p(x)$ همان $p(۱)$ است:

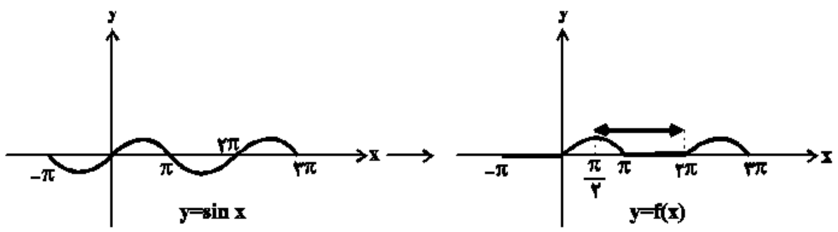
$$p(۱) = a + ۴a + ۴a - ۲ = ۹a - ۲$$

چون a طبیعی است. کم ترین مقدار مجموع ضرایب به ازای $a = ۱$ برابر ۷ است.

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | متوسط

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ;\sin x \geq ۰ \\ ۰ & ;\sin x < ۰ \end{cases}$$



پس طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که f در آن نزولی است، $۲\pi - \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۸٪ | متوسط

f اکیداً صعودی و $y = ۳ - x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(۳ - x)$ نیز اکیداً نزولی است. چون $f(۱) = ۰$ است، $x = ۱$ صفر $f(x)$ و $x = ۲$ صفر تابع $f(۳ - x)$ است.

حال برای به‌دست آوردن دامنه تابع g کافی است جدول تعیین علامتی را تشکیل دهیم. باید داشته باشیم $\frac{x-۴}{f(۳-x)} \geq ۰$.

x		۲		۴	
$x-۴$	−		−	۰	+
$f(۳-x)$	+	۰	−		−
$\frac{x-۴}{f(۳-x)}$	−	ت‌ن	+	۰	−

$$\Rightarrow D_g = (۲,۴]$$

پاسخ: گزینه ۳

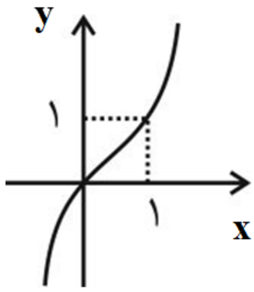
قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۰% | ساده

گزینه «۳»

کافی است نمودار $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x$ را رسم نماییم.

$$f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x = (x - ۱)^{۳} + ۱$$

نمودار این تابع به صورت روبه‌رو خواهد بود.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم x و f هم علامت هستند، بنابراین در تمام نقاط R به جز $x = ۰$ داریم: $\frac{x}{f(x)} \geq ۰$ پس دامنه این تابع $R - \{۰\}$ می‌باشد.

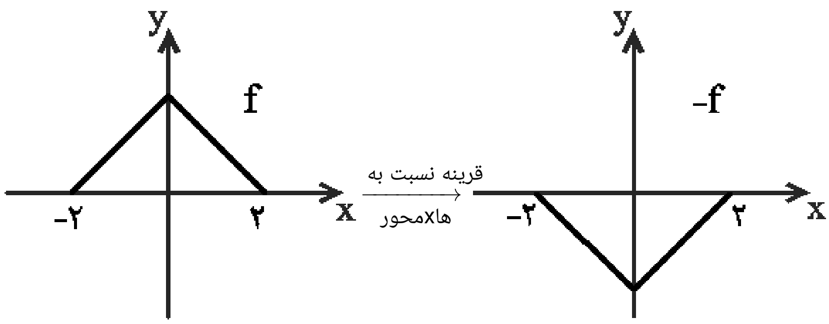
توجه: با استفاده از عددگذاری و حذف گزینه هم می‌توان گزینه صحیح را پیدا کرد.

پاسخ: گزینه ۱

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

گزینه «۱»

می‌توان تابع f را به صورت زیر در نظر گرفت که نسبت به محورyها متقارن است و در بازه‌ی [۰ , ۲] اکیداً نزولی است. قرینه‌ی آن را نسبت به محورxها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f- حاصل شود.



همانطور که مشاهده می‌شود تابع f- در بازه‌ی[۰ , ۲-] اکیداً نزولی است.

پاسخ: گزینه ۱

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

گزینه «۱»

دامنه: $|x - ۱| < ۲$

چون طرفین نامعادله نامنفی هستند می‌توانیم به توان ۲ برسانیم:

$$\Rightarrow (x - ۱)^{۲} < ۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ < ۴ \Rightarrow x^{۲} - ۲x - ۳ < ۰ \Rightarrow f(x) < ۰$$

بنابراین تابع f همواره منفی است. محور تقارن $x = ۱$ است، با توجه به دامنه که بازه‌ی$(-۱, ۳)$ است، تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است.

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

$$\frac{x^۲+۱}{x+۲}-\frac{۲}{۱}=\frac{x^۲+۱-۲x-۴}{x+۲}=\frac{x^۲-۲x-۳}{x+۲}$$

$$\frac{x^۲-۲x-۳}{x+۲}\div\frac{x+۱}{x^۲+۲x}=\frac{(x-۳)(x+۱)}{x+۲}\times\frac{x(x+۲)}{x+۱}$$

$$=\frac{x^۲-۳x}{۱}=x^۲-۳x$$

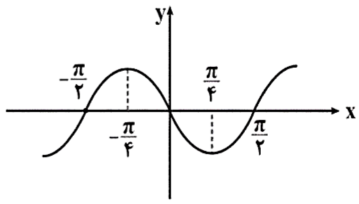
$$\begin{array}{l|l} x^۲-۳x & x-۱ \\ \cline{2-2} -(x^۲-x) & x-۲ \\ \hline -۲x & \\ -(-۲x+۲) & \\ \hline -۲ & \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷٪ | متوسط

گزینهٔ «۴»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، داریم:

$\frac{\pi}{۴}$ = بیشترین مقدارa

نام و نام خانوادگی:

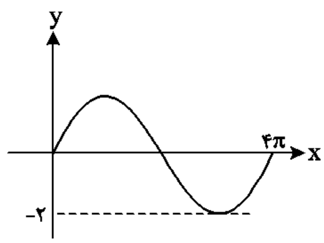
نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۲ - زمان دار**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

ساده | درصد پاسخگویی **%۵۲** | قلم‌چی ۱۴۰۰

۱

اگر قسمتی از نمودار $f(x) = a \sin bx$ به‌صورت شکل زیر باشد، حاصل ab کدام است؟

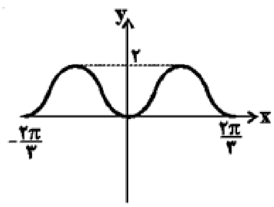


۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

ساده | درصد پاسخگویی **%۴۱** | قلم‌چی ۱۳۹۹

۲

بخشی از نمودار تابع $f(x) = ۱ + a \cos bx$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f(\frac{۱۵\pi}{۶})$ کدام است؟

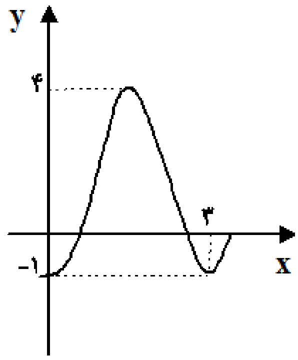


۱) -۱
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۲

دشوار | قلم‌چی ۱۳۹۹

۳)

شکل زیر، بخشی از نمودار تابع $y = a\cos(b\pi x) + c$ را نشان می‌دهد، بیش‌ترین مقدار $a + b + c$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

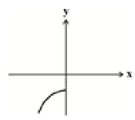
۳) $\frac{۱}{۳}$

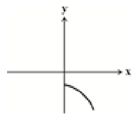
۴) $-\frac{۱}{۳}$

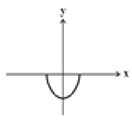
نسبتا دشوار | درصد پاسخگویی ۲۳% | قلم‌چی ۱۳۹۷

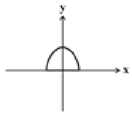
۴)

کدام گزینه قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - ۲\sin(x + \frac{\pi}{۲})$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

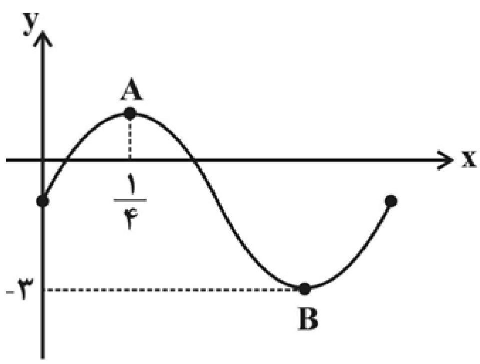
۳) 

۴) 

ساده | درصد پاسخگویی ۳۴% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۵)

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۲\sin b\pi x + c$ به‌صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

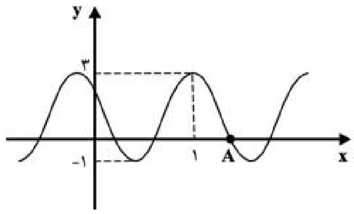
۲) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۴}$

دشوار | قلم‌چی ۱۳۹۹

۶) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin c\pi x$ در شکل زیر رسم شده است. طول نقطه A کدام است؟



۱) $\frac{۱۳}{۹}$

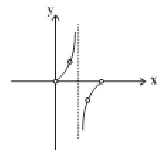
۲) $\frac{۱۴}{۹}$

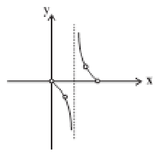
۳) $\frac{۵}{۳}$

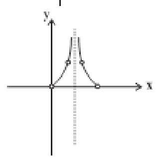
۴) $\frac{۴}{۳}$

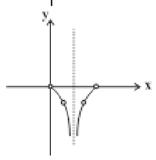
متوسط | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

۷) اگر دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{۱}{\sin x} - \frac{۱}{\tan x}$ برابر T باشد، نمودار آن روی بازهٔ $(۰, T)$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

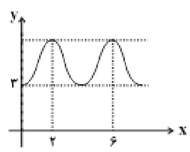
متوسط | درصد پاسخگویی ۱۷٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | گزینه های دام دار ۱

۸) نمودار تابع $y = \cos\frac{x}{۳}$ در بازهٔ $[۰, ۳\pi]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۸

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۷٪ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۳

۹) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin^۲(b\pi x)$ را نشان می‌دهد، $f(\frac{۵۰}{۳})$ کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$

۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۸٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۱

۱۰) برد تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{۴})$ با دامنه $[۰, \frac{۱۱\pi}{۱۲}] - \{\frac{۳\pi}{۴}\}$ کدام است؟

۱) R ۲) $[-۱, +\infty)$

۳) $[-\sqrt{۳}, +\infty)$ ۴) $R - (-\sqrt{۳}, -۱)$

دشوار | درصد پاسخگویی ۲٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

۱۱) معادله $\sin^۳ x + \cos^۳ x = \cos x$ در فاصله $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 3x \sin(3\pi - x) - \sin 3x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{4}$
۲) $\frac{k\pi}{2}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

گزینه های دام دار ۲ | قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

۱۳) معادله‌ی $\frac{(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)}{2\sin x} = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ

کنکور سراسری ۱۳۹۷ | متوسط

۱۴) جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{4}$
۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$
۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

۱۵) انتهای کمان جواب‌های معادله $2 - \sin 2x = 2\sin^2 x$ روی دایره مثلثاتی تشکیل یک چندضلعی می‌دهند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}$
۴) ۱

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۲% | متوسط

۱۶) مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) π
۴) 2π

گزینه های دام دار ۲ - ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴% | دشوار

۱۷) مجموع جواب‌های معادله $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{3\pi}{4}$
۳) $\frac{5\pi}{4}$
۴) π

قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۶% | دشوار

۱۸) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 5x \cos 3x - \sin 3x \sin x}{\cos 2x} = 1$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{3}$
۲) $\frac{k\pi}{2}$
۳) $\frac{2k\pi}{5}$
۴) $\frac{2k\pi}{3}$

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

۱۹) اگر $4\tan x + \tan x \tan y = 1 - 4\tan y$ باشد، حاصل $\cot(\frac{\pi}{2} - x - y)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱/۲۵

قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱% | دشوار

۲۰) معادله‌ی مثلثاتی $4\sin x \cos 2x = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۵۲٪ | ساده

گزینهٔ «۱»

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲}$$

کم‌ترین مقدار تابع برابر ۲- است. پس: $|a| = ۲ \Rightarrow |ab| = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$

چون نمودار سینوس قرینه نشده پس $ab > ۰$ است.

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۱٪ | ساده

مقدار تابع در نقطه $x = ۰$ برابر صفر است.

$$f(۰) = ۱ + a\cos b(۰) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ + a = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

دوره تناوب تابع $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} = T$ است. پس $|b| = ۳$ و $b = \pm ۳$ خواهد بود، با داشتن a و b داریم:

$$f(x) = ۱ - \cos(\pm ۳x) = ۱ - \cos ۳x$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{۱۵\pi}{۶}\right) = ۱ - \cos(۳)\left(\frac{۱۵\pi}{۶}\right) = ۱ - \cos\frac{۱۵\pi}{۲}$$
$$= ۱ - \cos\left(۸\pi - \frac{\pi}{۲}\right) = ۱ - \cos\frac{\pi}{۲} = ۱ - ۰ = ۱$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

گزینه «۴»

طبق روابط گفته شده در صفحه ۲۷کتاب درسی داریم:

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = ۴ \\ y_{min} = -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \,,\ |a| = \frac{۵}{۲}$$

اما مقدار $a = -\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است، زیرا نمودار داده شده قرینه یک نمودار کسینوسی نسبت به محورx هاست.

دوره تناوب نمودار هم، مشخص است که برابر با۳ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} = ۳ \Rightarrow |b| = \frac{۲}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۲}{۳}$$

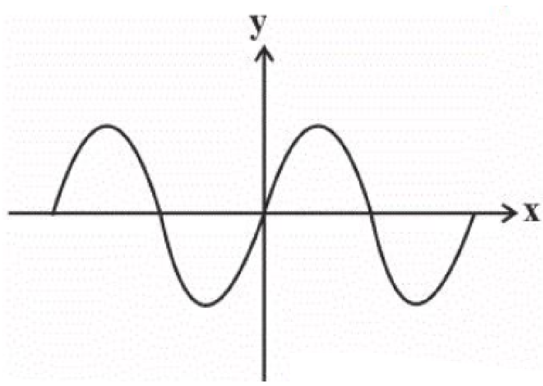
هر دو مقدارbقابل قبول است؛ زیرا نمودار $y = \cos x$ نسبت به محورyها متقارن است.

$$\begin{cases} b = -\frac{۲}{۳} : a + b + c = -\frac{۵}{۳} \\ b = \frac{۲}{۳} : a + b + c = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۳

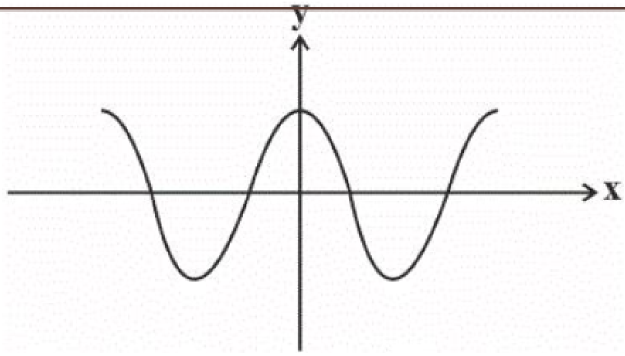
قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۳٪ | نسبتا دشوار

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

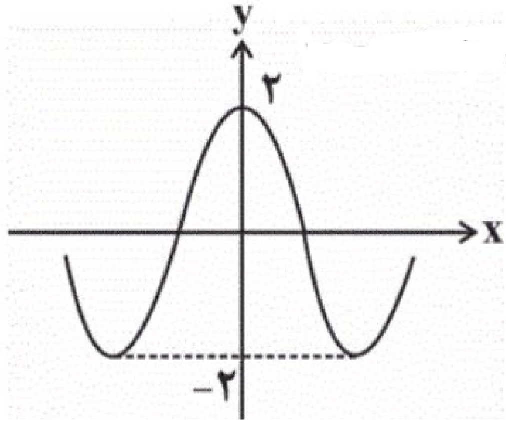


انتقال $\frac{\pi}{۲}$واحد به چپ $\longrightarrow$

عرض ها دو برابر $\longrightarrow$

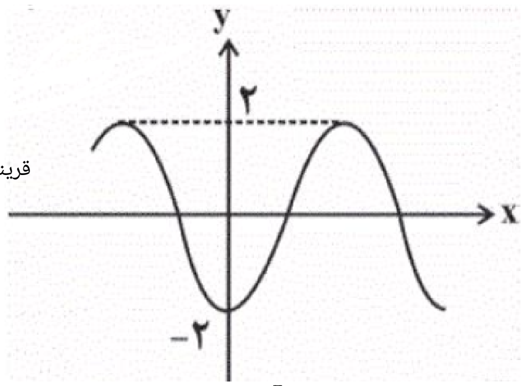


$y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$



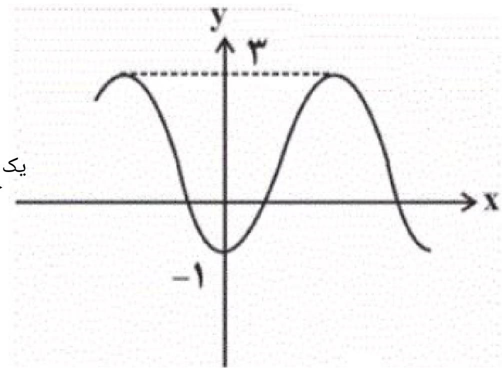
$y = ۲\sin(x + \frac{\pi}{۲})$

قرینه نسبت به محورxها $\longrightarrow$



$y = -۲\sin(x + \frac{\pi}{۲})$

یک واحد به بالا $\longrightarrow$



$y = ۱ - ۲\sin(x + \frac{\pi}{۲})$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده

گزینه «۲»

$y_{min} = -|a| + c = -۲ + c = -۳ \Rightarrow c = -۱ (۱)$

$\frac{T}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۱ \xrightarrow{b>۰} b = ۲$

از طرفی داریم:

$$y_{max} = |a| + c = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۴}\\ ۱\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{۳}{۴}\\ -۳\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۱۶} = \sqrt{\frac{۶۵}{۴}} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۹ — دشوار

گزینه «۱»

بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع به‌ترتیب ۳ و ۱- است، پس داریم:

$$\begin{cases} y_{min} = a - |b| = -۱ \\ y_{max} = a + |b| = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, |b| = ۲$$

چون در همسایگی $x = ۰$ نمودار تابع نزولی است، $bc < ۰$ خواهد بود. حال برای سادگی b را منفی و c را مثبت در نظر می‌گیریم. از روی نمودار مشخص است که $\frac{۳}{۴}$ برابر دوره تناوب نمودار برابر ۱ است.

$$\frac{۳}{۴}T = ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{c\pi} = \frac{۲}{c} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ - ۲\sin\frac{۳\pi x}{۲}$$

نقطه A یکی از صفرهای تابع f است:

$$\xrightarrow{f(x)=۰} \sin\frac{۳\pi x}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳\pi x}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۴k}{۳} + \frac{۱}{۹} \\ \frac{۳\pi x}{۲} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۴k}{۳} + \frac{۵}{۹} \end{cases}$$

صفرهای مثبت تابع عبارت‌اند از $\frac{۱}{۹}, \frac{۵}{۹}, \frac{۱۳}{۹}, \frac{۱۷}{۹}, \dots$ طول نقطه A سومین صفر مثبت تابع یعنی $\frac{۱۳}{۹}$ است.

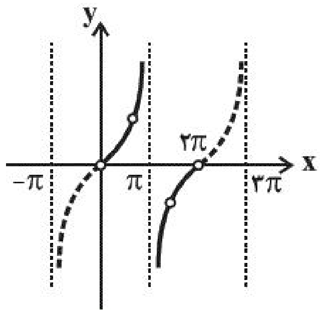
پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۲٪ — متوسط

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = \frac{۱}{\sin x} - \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{۱-\cos x}{\sin x} = \frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

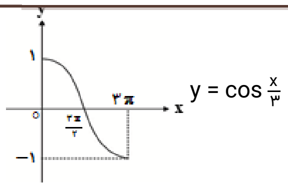
$$= \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}} = \tan\frac{x}{۲} \;;\; x \neq \frac{k\pi}{۲} \quad (k \in Z)$$

دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $T = \frac{\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۲\pi$، پس کافی است نمودار تابع را در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ رسم کنیم. نمودار $y = \tan\frac{x}{۲}$ از انبساط افقی نمودار $y = \tan x$ در راستای محور طول‌ها با ضریب ۲ حاصل می‌شود.



پاسخ: گزینه ۲ — گزینه های دام دار ۱ — قلمچی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۱۷٪ — متوسط

دوره‌ی تناوب این تابع برابر با $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$ است، بنابراین نمودار آن در بازه‌ی $[۰, ۳\pi]$ به صورت روبه‌رو است:



در نتیجه، تابع مورد نظر در بازه‌ی داده شده، محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

پاسخ: گزینه ۲ — گزینه های دام دار ۳ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۷% | متوسط

$$f(۰) = a = ۳ \Rightarrow f(x) = ۳ + \sin^۲(b\pi x)$$

$$= ۳ + \frac{۱-\cos ۲b\pi x}{۲} = \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos ۲b\pi x$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع f، برابر $T = ۶ - ۲ = ۴$ است؛ بنابراین داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{۲\pi|b|} = \frac{۱}{|b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴}$$

چون نمودار تابع $y = \cos x$ نسبت به محورyها متقارن است، در علامت b تأثیری ندارد.

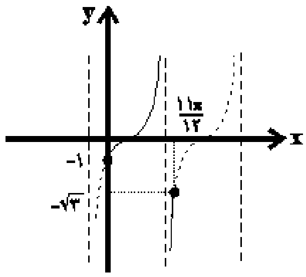
$$\Rightarrow f(\frac{۵۰}{۳}) = ۳ + \sin^۲ \frac{۲۵\pi}{۶} = ۳ + \sin^۲ \frac{\pi}{۶}$$

$$= ۳ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۴}$$

پاسخ: گزینه ۴ — گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

گزینه «۴»

اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{۴}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \tan(x - \frac{\pi}{۴})$ به دست می‌آید که به صورت زیر است. با توجه به نمودار معلوم است که اگر دامنه تابع $[۰, \frac{۱۱\pi}{۱۲}] - \{\frac{۳\pi}{۴}\}$ باشد، برد آن $R - (-\sqrt{۳}, -۱)$ است.



پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲% | دشوار

$$\sin^۳ x = \cos x - \cos^۳ x \Rightarrow \sin^۳ x = \cos x(۱ - \cos^۲ x)$$
$$\Rightarrow \sin^۳ x = \cos x . \sin^۲ x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi \\ \sin x = \cos x \xrightarrow{\text{بر cos x تقسیم می کنیم}} \tan x = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}$$

در نتیجه معادله در بازه $[۰, ۲\pi]$ پنج جواب دارد.

پاسخ: گزینه ۱ — سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | نسبتا دشوار

گزینه ی «۱»

از آنجایی که $\cos(\pi + x) = -\cos x$، $\cos \frac{۳\pi}{۲} = ۰$ و $\sin(۳\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ لذا در معادله خواهیم داشت:

$\cos ۳x \sin x + \sin ۳x \cos x = ۰$

با استفاده از $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ خواهیم داشت:

$\Rightarrow \sin(x+۳\pi) = ۰ \Rightarrow \sin ۴x = ۰ \Rightarrow ۴x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

گزینه‌ی «۴»

$$\frac{(\sin x+\cos x)^۲-۱}{۲\sin x} = \frac{(\sin x+\cos x+۱)(\sin x+\cos x-۱)}{۲\sin x}$$

$$= \frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x-۱}{۲\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin x\cos x}{۲\sin x} = \cos x = ۱ \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲\pi \end{cases}$$

با توجه به این‌که جواب‌های به‌دست آمده، ریشه‌ی مخرج هستند، غیرقابل‌قبول‌اند.

پاسخ: گزینه ۴ | کنکور سراسری ۱۳۹۷ | متوسط

گزینه ۴

$$\tan x \tan ۳x = ۱ \rightarrow \tan x = \frac{۱}{\tan ۳x} = \cot ۳x$$

$$\rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - ۳x\right)$$

$$\rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۳x$$

$$\rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$$

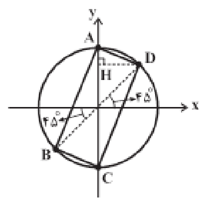
پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

$$۱ - \frac{\sin ۲x}{۲} = \sin^۲ x \Rightarrow ۱ - \sin^۲ x = \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \cos^۲ x - \sin x\cos x = \cos x(\cos x - \sin x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

با مشخص کردن انتهای کمان جواب‌های بالا، چهارضلعی ABCD حاصل می‌شود. این چهارضلعی مستطیل است.



حال داریم:

$$S_{ABCD} = ۲S_{\triangle ACD} = ۲\left(\frac{۱}{۲}AC.DH\right)$$

$$\xrightarrow[DH=\cos ۴۵^\circ]{AC=۲} S_{ABCD} = ۲\left(\frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = \sqrt{۲}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۲% | متوسط

گزینه«۲»

$$۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x - ۱)(\sin x - ۱) = ۰$$

$$\xrightarrow{0\le x\le 2\pi}\begin{cases}\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}\\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع ریشه ها $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ — گزینه های دام دار ۲ - ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴% | دشوار

گزینه «۱»

$\tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \tan 2x$

$\Rightarrow \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan x \tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4}\,;\, k \in Z$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}\\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $= \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

دقت کنید که $x = \frac{3\pi}{4}$ در دامنه $\tan 2x$ قرار ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۶% | دشوار

در صورت کسر با استفاده از فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x)}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x)}{\cos 2x} = 1$$

حال در صورت کسر با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(2\cos 6x \cos 2x)}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos 6x \cos 2x}{\cos 2x} = 1$$

توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده در شرط $\cos 2x \neq 0$ صدق می‌کنند.

$\Rightarrow \cos 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ — قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

گزینه‌ی «۱»

$4\tan x + 4\tan y = 1 - \tan x \tan y$

$\Rightarrow 4(\tan x + \tan y) = 1 - \tan x \tan y$

$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \tan(x + y) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cot(\frac{\pi}{2} - x - y) = \cot(\frac{\pi}{2} - (x + y)) = \tan(x + y)$

$= \frac{1}{4} = 0/25$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱% | دشوار

گزینه‌ی «۳»

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$4\sin x(1 - 2\sin^2 x) = 1 \Rightarrow 4\sin x - 8\sin^3 x = 1$

حال اگر فرض کنیم $\sin x = t$خواهیم داشت:

$$\Rightarrow (2t-1)(4t^2+2t+1)-2(2t-1)=0$$

$$\Rightarrow (2t-1)(4t^2+2t-1)=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ \text{یا}\ t=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ \sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ \text{یا}\ \sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

بنابراین معادله ۶ جواب دارد

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۳ - زمان دار**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

۱

مقادیر حد راست و حد چپ تابع $f(x) = \frac{3}{2\sin^2 x - 1}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $+\infty, +\infty$ ۲) $-\infty, -\infty$ ۳) $-\infty, +\infty$ ۴) $+\infty, -\infty$

خارج از کشور ۱۳۹۸ | متوسط

۲

حدّ عبارت $\frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$، وقتی $x \to 2$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳۶% | ساده

۳

حاصل $\lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۰% | متوسط

۴

اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، آنگاه نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(-1, 0)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-2, 2)$ ۴) $(0, 1)$

خارج از کشور ۱۴۰۱ | دشوار

۵

حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده | گزینه های دام دار ۴

۶

حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6} - x}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

۷

اگر $\lim_{x \to b} \frac{a}{2x^2 + ax + 2} = -\infty$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۵-

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

۸

حاصل $\lim_{x \to (-1)^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+|x|-2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\infty$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $+\infty$

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۶% | ساده

۹

حاصل $\lim_{x \to 3^-} \frac{([x]+3)|x^2-2x-3|}{x-3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) ۲۰- ۴) ۱۰

ساده | درصد پاسخگویی ۳۲% | قلم‌چی ۱۳۹۸

(۱۰) اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۲)^۲}$ مجانب افقی خود را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

متوسط | خارج از کشور ۱۳۹۹

(۱۱) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادله مجانب افقی آن کدام است؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=-\frac{۳}{۲}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۴% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۳

(۱۲) حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{۱+\cos^۳x}{۱-\sin^۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر
۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۲% | قلم‌چی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۴

(۱۳) حاصل $\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}\frac{\tan x+۱}{۱+\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲
۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۵ | گزینه های دام دار ۴

(۱۴) حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sin x}{x+\sin x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۴% | قلم‌چی ۱۳۹۴ | گزینه های دام دار ۳

(۱۵) اگر حد تابع $f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۳x}}{ax+۱}$ وقتی $x\to-\infty$ برابر ۱ باشد، $f(-۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) ۳ ۴) ۳-

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۹% | قلم‌چی ۱۳۹۷

(۱۶) اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-۱}+mx^۳-۱}{۲x^{n+۱}+۴x^۲+۳}=-۲$، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

ساده | درصد پاسخگویی ۳۹% | قلم‌چی ۱۳۹۹

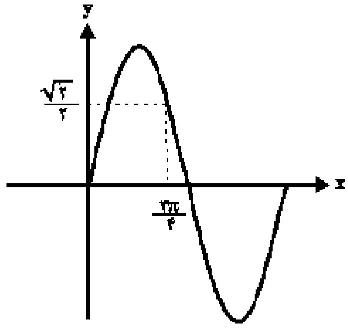
(۱۷) حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^۲+۱)^۲-(x^۲-۱)^۲}{(۲x+۱)^۲+(۲x-۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۹٪ — ساده

گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم حد تابع $y = 2\sin^2 x - 1$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ برابر صفر است.



به نمودار $y = \sin x$ توجه کنید: این تابع در همسایگی $x = \frac{3\pi}{4}$ نزولی است.

$$\begin{cases} x > \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin^2 x - 1 < 0 \\ \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \left(\frac{3\pi}{4}\right)^+} \frac{3}{2\sin^2 x - 1} = -\infty \\ x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin^2 x - 1 > 0 \\ \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} \frac{3}{2\sin^2 x - 1} = +\infty \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۴ — خارج از کشور ۱۳۹۸ — متوسط

گزینه۴

با جای‌گذاری $x = 2$ در عبارت داده شده، به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

روش اول:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{2^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}}{2^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8 - (3x+2)}{(5x^2 - 18x + 16)(4+4+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(12)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-3}{(5x-8)(12)} = \frac{-3}{(2)(12)} = -\frac{1}{8}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \xrightarrow{hop} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{-3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18}$$

$$= \frac{\frac{-1}{\sqrt[3]{64}}}{20 - 18} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$$

یادآوری: در محاسبهٔ حد عبارات کسری که به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آیند، طبق قضیهٔ هوپیتال (hop) می‌توانیم از صورت و مخرج جداگانه مشتق گرفته و دوباره حاصل حد را حساب کنیم.

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۳۶٪ — ساده

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)}$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۰٪ | متوسط

گزینه «۴»

$$f(x)=\frac{x+۳}{۲x+۱}\quad,\quad g(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+۳}{۲g(x)+۱}=\frac{\frac{۲x-۱}{x+۲}+۳}{۲(\frac{۲x-۱}{x+۲})+۱}$$

$$=\frac{\frac{(۲x-۱)+۳(x+۲)}{x+۲}}{\frac{۲(۲x-۱)+(x+۲)}{x+۲}}=\frac{\frac{۵x+۵}{x+۲}}{\frac{۵x}{x+۲}}=\frac{۵x+۵}{۵x}\quad,\ x\neq -۲$$

$\Rightarrow (fog)(x)=\frac{۵x+۵}{۵x} \Rightarrow$ ریشه‌ی مخرج: $x=۰$ (مجانب قائم)

$$\lim_{x\to\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۵x+۵}{۵x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵x}{۵x}=۱$$

$\Rightarrow y=۱$ (مجانب افقی)

بنابراین محل تلاقی مجانب‌ها نقطه‌ی(۰ , ۱) است.

پاسخ: گزینه ۱ | خارج از کشور ۱۴۰۱ | دشوار

گزینه «۱»

هوپیتال ساده‌ترین روش است:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۴\sin^۲\frac{x}{۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{-۲\sin\frac{x}{۲}}$$

$$\text{HOP}\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{-۳}{۲\sqrt{۲-۳x}}+\frac{۵}{۲\sqrt{۲-۵x}}}{-\cos\frac{x}{۲}}$$

$$=\frac{-\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}}{-\frac{۱}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

پاسخ: گزینه ۳ | گزینه های دام دار ۴ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۴٪ | ساده

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{[۲-x]}{\sqrt{x+۶}-x}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-۲}{\sqrt{x+۶}-x}\times\frac{\sqrt{x+۶}+x}{\sqrt{x+۶}+x}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-۲(\sqrt{x+۶}+x)}{x+۶-x^۲}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-۲(۶)}{-(x^۲-x-۶)}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱۲}{(x-۳)(x+۲)}=+\infty$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه ۳، تابع $y=[۲-x]$ برخط $y=-۲$ منطبق است:

$$۳<x<۴ \Rightarrow -۴<-x<-۳ \Rightarrow -۲<۲-x<-۱$$
$$\Rightarrow [۲-x]=-۲$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

مخرج کسر باید ریشه مضاعف $x=b$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}}=a^۲-۱۶=۰ \Rightarrow a=\pm ۴ \longrightarrow a=-۴$$

ریشه مضاعف عبارت $۲x^۲-۴x+۲$ برابر $b=۱$ است.

$$\Rightarrow a-b=-۴-۱=-۵$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۹٪ | دشوار

توجه کنید که مخرج هریک از کسرها به‌ازای $x = -۱$، صفر می‌شود و حاصل عبارت مورد نظر، ابهام دارد که باید آن را رفع ابهام کنیم.

وقتی $x \to (-۱)^{+}$ داریم: $|x| = -x$

بنابراین حد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\lim_{x \to (-۱)^{+}} \left(\frac{x-۲}{x^{۲}-۱} + \frac{۲}{x^{۲}-x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x \to (-۱)^{+}} \left(\frac{x-۲}{(x-۱)(x+۱)} + \frac{۲}{(x+۱)(x-۲)}\right)$$

$$= \lim_{x \to (-۱)^{+}} \frac{(x-۲)^{۲}+۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x \to (-۱)^{+}} \frac{x^{۲}-۴x+۴+۲x-۲}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x \to (-۱)^{+}} \frac{x^{۲}-۲x+۲}{(x-۱)(x+۱)(x-۲)} = \lim_{x \to (-۱)^{+}} \frac{۵}{۰^{+}} = +\infty$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۶٪ | ساده

گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x \to ۳^{-}} \frac{([x]+۳)|x^{۲}-۲x-۳|}{x-۳} = \lim_{x \to ۳^{-}} \frac{([۳^{-}]+۳)|x-۳||x+۱|}{x-۳}$$

$$\lim_{x \to ۳^{-}} \frac{(۲+۳)(-(x-۳)(x+۱))}{x-۳} = -۲۰$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | ساده

گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}-۴x+۴} = ۱$$

$\Rightarrow$ مجانب افقی : $y = ۱$

$$\frac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}-۴x+۴} = ۱ \Rightarrow x^{۲}+۲x = x^{۲}-۴x+۴ \Rightarrow ۶x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{۲}{۳}, ۱\right)$$

فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ | خارج از کشور ۱۳۹۹ | متوسط

گزینهٔ «۲»

$x = ۲$ باید ریشه مضاعف عبارت مخرج باشد:

$$۲x^{۲}+bx+c = ۲(x-۲)^{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^{۲}+۷x}{۲(x-۲)^{۲}} \xrightarrow{f(۳)=۶} \frac{۹a+۲۱}{۲} = ۶ \Rightarrow a = -۱$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x^{۲}+۷x}{۲(x-۲)^{۲}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^{۲}}{۲x^{۲}} = -\frac{۱}{۲}$$

خط $y = -\frac{۱}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع است.

البته این سؤال اشکال دارد. حالات دیگری هم برای برقراری فرض مسئله وجود دارد، اینکه ریشه‌های مخرج $x = ۲$ و $x = -\frac{۷}{a}$ باشند. مجانب‌های افقی در این حالات به ترتیب $y = \frac{۵}{۶}$ و $y = ۱$ هستند.

پاسخ: گزینه ۴ | دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۴٪ | متوسط

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{۱+\cos^۳ x}{۱-\sin^۲ x}=\frac{۱+۰^+}{۱-(۱)^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | متوسط

$$\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}\frac{\tan x+۱}{۱+\sin x}=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+۱}{۱+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}\frac{\sin x+\cos x}{(\cos x)(۱+\sin x)}=\frac{-۱}{(۰^+)(۰^-)}=+\infty$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۱٪ | متوسط

می‌دانیم همواره $-۱\le \sin x\le ۱$ و با توجه به این‌که $x\to+\infty$ لذا $x>۰$ داریم: $-\frac{۱}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{۱}{x}$ چون $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱}{x})=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{x})=۰$ لذا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(۲+\frac{\sin x}{x})}{x(۱+\frac{\sin x}{x})}=\frac{۲+۰}{۱+۰}=۲$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه های دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۴٪ | متوسط

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۳x}}{ax+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|x|}{ax}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-(-x)}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}$$

چون حاصل حد برابر ۱ است، بنابراین:

$$\frac{۳}{a}=۱\Rightarrow a=۳$$

درنتیجه:

$$f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۳x}}{۳x+۱}\Rightarrow f(-۳)=\frac{-۶-۰}{-۹+۱}=\frac{-۶}{-۸}=\frac{۳}{۴}$$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۹٪ | متوسط

حد داده شده ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ دارد.

با توجه به اینکه توان جمله $x^{n-۱}$ در صورت، دو واحد از توان عبارت $x^{n+۱}$ در مخرج، کمتر است، پس برای اینکه حاصل حد ۲- شود، باید:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-۱}+mx^۳-۱}{۲x^{n+۱}+۴x^۲+۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^۳}{۲x^{n+۱}}=-۲\quad(*)$$

باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد، بنابراین: $n+۱=۳\Rightarrow n=۲$

باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد، بنابراین:

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)}\lim_{x\to\infty}\frac{mx^۳}{۲x^۳}=-۲\Rightarrow\frac{m}{۲}=-۲\Rightarrow m=-۴$$

$$\Rightarrow m+n=-۲$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۹٪ | ساده

گزینه «۴»

ابتدا اتحادهای صورت و مخرج را باز می‌کنیم:

$$\frac{(x^۲+۱)^۲-(x^۲-۱)^۲}{(۲x+۱)^۲+(۲x-۱)^۲}=\frac{(x^۴+۲x^۲+۱)-(x^۴-۲x^۲+۱)}{(۴x^۲+۴x+۱)+(۴x^۲-۴x+۱)}=\frac{۴x^۲}{۸x^۲+۲}$$

حال حاصل حد ...

$\lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۳}{۸x^۳+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۳}{۸x^۳} = \frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۲% | متوسط

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{f(x)}\,(\sqrt{f(x)}-۱)}{(۱-\sqrt{f(x)})\,(۱+\sqrt{f(x)})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{f(x)}}{۱+\sqrt{f(x)}} = \frac{-۱}{۱+۱} = -\frac{۱}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۴۰% | ساده

راه حل اول:

$\lim_{x\to+\infty} (fof)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

وقتی $x \to +\infty$، آنگاه $f(x) \to ۰^-$، بنابراین:

$= \lim_{f(x)\to ۰^-} f(f(x))$

با فرض $f(x) = t$ داریم:

$= \lim_{t\to ۰^-} f(t) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-۱}{x+۱} = -۱$

راه حل دوم: تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$f(f(x)) = f\left(\frac{-۱}{x+۱}\right) = \frac{-۱}{\frac{-۱}{x+۱}+۱} = \frac{-x-۱}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-۱}{x} = -۱$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۲% | ساده

گزینهٔ «۳»

$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x^n-۵x+۲}{ax^۳+۷x^۲-۴x} = \frac{۳}{۵}$

$\Rightarrow n = ۳ ,\ \frac{۲}{a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۳}$

$f(x) = \frac{۲x^۳-۵x+۲}{\frac{۱۰}{۳}x^۳+۷x^۲-۴x}$

$f(۱) = \frac{۲(۱)^۳-۵(۱)+۲}{\frac{۱۰}{۳}(۱)^۳+۷(۱)^۲-۴(۱)} = \frac{۲-۵+۲}{\frac{۱۰}{۳}+۷-۴}$

$f(۱) = -\frac{۳}{۱۹}$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۴ - زمان دار**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

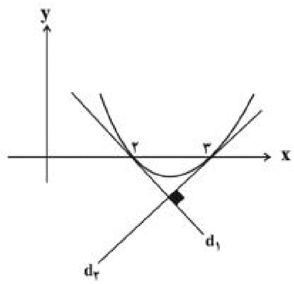
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۰% | متوسط

۱) مجموع مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) صفر　　۴) $-\sqrt{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۴% | متوسط

۲) در شکل زیر، خطوط عمود بر هم d_1 و d_2 در $x=2$ و $x=3$ مماس روی محور xها بر نمودار تابع f هستند. اگر $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{f(x)}=3$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^3-8}$ کدام است؟

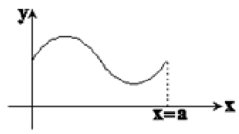


۱) $-\frac{1}{36}$　　۲) $-\frac{1}{4}$

۳) $-\frac{1}{8}$　　۴) $-\frac{1}{16}$

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۱% | متوسط

۳) درشکل مقابل با افزایش مقادیر x از $x=0$ تا $x=a$، مقدار مشتق تابع چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش - کاهش

۲) افزایش - کاهش - افزایش

۳) کاهش - افزایش

۴) کاهش - افزایش - کاهش

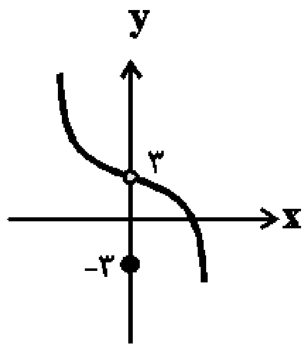
سراسری ۱۴۰۱ | دشوار

۴) اگر $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{30}$　　۲) $-\frac{5}{12}$　　۳) $\frac{5}{6}$　　۴) $-\frac{13}{15}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۵% | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۲

۵) شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. مقدار مشتق $g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ کدام است؟



۱) وجود ندارد.
۲) -3
۳) 3
۴) صفر

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۶) اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(-x+h)}{x} = 2h^2$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۴% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۷) اگر $f(x) = \sin x$ باشد، معادلهٔ $f'(x) = f'(\frac{\pi}{2})$ در بازهٔ $(0, 3\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

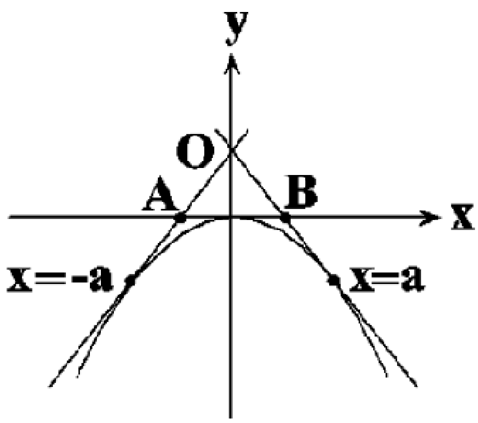
ساده | درصد پاسخگویی ۴۱% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۸) اگر خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x = -2$ بر روی آن، موازی خط $3y - 2x + 5 = 0$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+3h)-f(-2)}{4h}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۸% | قلم‌چی ۱۳۹۸

۹) مطابق شکل زیر، اگر خطوط مماس بر تابع $f(x) = -x^{2}$ در نقاط $x = a$ و $x = -a$ ترسیم شوند، مثلث OAB به‌وجود می‌آید. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) $\frac{a^{2}}{2}$
۲) a^{2}
۳) a^{3}
۴) $\frac{a^{3}}{2}$

متوسط | خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰) در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۴

۱۱) اگر $f(x) = \begin{cases} x^{2}+1; & x \geq 1 \\ x^{3}-1; & x < 1 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱) $f'_{+}(1) = 2$
۲) $\lim_{x\to 1^{+}} f'(x) = 2$
۳) $f'_{-}(1) = 3$
۴) $\lim_{x\to 1^{-}} f'(x) = 3$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۷% | قلم‌چی ۱۴۰۰

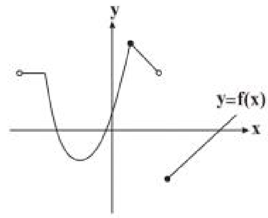
۱۲) اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+b}\,; & x \geq 2 \\ x^{2}-x\,; & x < 2 \end{cases}$، $f'(2)$ موجود باشد، آنگاه $f(3)$ کدام است؟

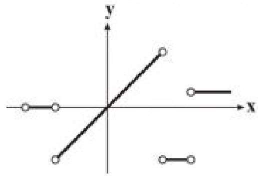
۱) ۲
۲) $\sqrt{8}$
۳) ۴
۴) $\sqrt{10}$

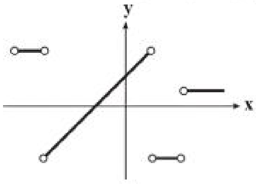
قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۴۴% | ساده

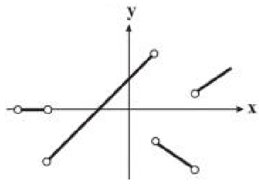
(۱۳)

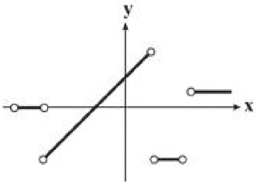
با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f' باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۱% | متوسط

(۱۴)

حدود a کدام باشد تا تابع $f(x) = \sqrt[3]{ax + a - 2}$ روی بازه $[1, 3]$ مشتق‌پذیر باشد؟

۱) $R - (0, \frac{1}{2})$

۲) $[0, 1]$

۳) $R - [\frac{1}{2}, 1]$

۴) $[-\frac{1}{2}, 1]$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۵% | ساده

(۱۵)

مجموع مشتق چپ و راست تابع $f(x) = |x - 2|[2x]$ در $x=2$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۱% | متوسط

(۱۶)

اگر $f(x) = [x]|x^2 - x - 2|$ باشد، حاصل $f'_+(-2) - f'_-(2)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷   ۲) ۱۲   ۳) ۱۳   ۴) ۱۸

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

(۱۷)

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t) = 7\sqrt{t} + 50$ در بازه $[4, 16]$، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $t = a$ است. a کدام است؟

۱) ۲۷   ۲) ۹   ۳) ۴۹   ۴) ۱۲

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

(۱۸)

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V(t) = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به‌دست آید، در چه زمانی بر حسب ثانیه آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم مایع باقی‌مانده برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازه $[0, 100]$ است؟

۱) ۳۰   ۲) ۴۰   ۳) ۵۰   ۴) ۶۰

خارج از کشور ۱۴۰۱ | متوسط

(۱۹)

در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^2 x - \cos^4 x$ است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۱% | قلم‌چی ۱۳۹۴

۲۰) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^3+x$ ، در بازه‌ی $[1,3]$ کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۴
۳) ۱۶   ۴) ۱۸

ساده | درصد پاسخگویی ۳۹% | قلم‌چی ۱۳۹۸

۲۱) اگر آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در بازه $[a,2]$ برابر $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x=a$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۴% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۲۲) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در کدام طول با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[1,4]$برابر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{9}{4}$

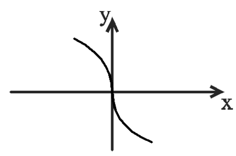
متوسط | خارج از کشور ۱۳۹۸

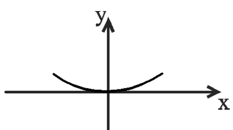
۲۳) در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

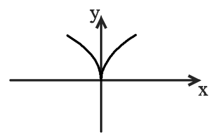
۱) ۰/۰۳   ۲) ۰/۰۴   ۳) ۰/۰۵   ۴) ۰/۰۶

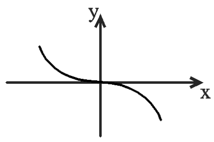
متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۲۴) نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


ساده | درصد پاسخگویی ۴۸% | قلم‌چی ۱۴۰۰

۲۵) اگر $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x+1}+a & x>0\\ x^2-bx+b & x\le 0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=ab$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۰٪ | متوسط

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و به طور مشابه داریم:

$$f'_-(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f'_+(0)+f'_-(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۴٪ | متوسط

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}} = \frac{1}{f'(3)} = 3 \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{3}$$

یعنی شیب خط d_2 برابر $\frac{1}{3}$ است. حال چون خط d_1 بر خط d_2 عمود است، شیب d_1 یا به عبارت دیگر، مشتق تابع f در $x = 2$ برابر -3 است.

$$f'(2) = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{(x^2+2x+4)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x+4} \times \lim \frac{f(x)}{x-2}$$

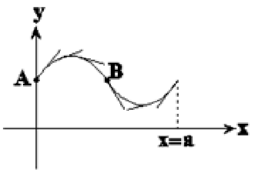
$$= \frac{1}{12}f'(2) = -\frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۲ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۱٪ | متوسط

گزینه «۳»

با توجه به شکل، مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس برنمودار است، از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



پاسخ: گزینه ۳

سراسری ۱۴۰۱ | دشوار

گزینه «۳»

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \to f(5) = 2$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)$$

$$\to f'(5) = 2 + \frac{1}{12}(1) = \frac{25}{12}$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^{۲}(۵-h)-۳f(۵-b)+۲}{۵h-h^{۲}}$$

$$= \frac{۰}{۰}\ \underset{\text{نسبت به } h}{\text{Hop}}\ \lim \frac{-۲f(۵-h)f'(۵-h)+۳f'(۵-h)}{۵-۲h}$$

$$= \frac{-۲f(۵)f'(۵)+۳f'(۵)}{۵} = \frac{-۲(۲)(\frac{۲۵}{۱۲})+۳(\frac{۲۵}{۱۲})}{۵} = \frac{\frac{-۲۵}{۱۲}}{۵} = \frac{-۵}{۱۲}$$

پاسخ: گزینه ۳ — گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

گزینه ی «۳»

با توجه به نمودار می‌توان گفت $f(۰) = -۳$ و $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۳$، حال می‌توان نوشت:

$$g'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{g(x)-g(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{xf(x)-۰}{x} = \lim_{x\to ۰} f(x) = ۳$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

نکته:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h} = (m-n)f'(x_۰)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{f(h+x)-f(h-x)}{x} = ۲f'(h) = ۲h^{۲} \Rightarrow f'(h) = h^{۲}$$

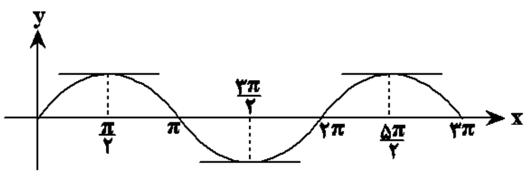
$$\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x^{۲}-۹} = \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{x+۳}\left(\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۶}f'(۳) = \frac{۱}{۶} \times ۹ = \frac{۳}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۴% | متوسط

گزینهٔ «۴»

همان‌طور که می‌بینید در سه نقطه مقدار مشتق تابع $f(x)$ برابر ۰ = $f'(\frac{\pi}{۲})$ است.



پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۱% | ساده

گزینهٔ «۱»

می‌دانیم: $\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k}f'(a)$

خط $۳y - ۲x + ۵ = ۰$ موازی خط مماس بر f در $x = -۲$ است، پس $f'(-۲) = \frac{۲}{۳}$ بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(-۲+۳h)-f(-۲)}{۴h} = \frac{۳-۰}{۴}f'(-۲) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۸% | دشوار

گزینهٔ «۴»

ابتدا معادله خط ... یسیم:

این خط از نقطه $(a,f(a))$ یا $(a,-a^۲)$ می‌گذرد و شیب آن برابر با $f'(a)$ است.

$$f'(x) = -۲x \Rightarrow f'(a) = -۲a$$

$$y-(-a^۲) = -۲a(x-a) \Rightarrow y = -۲ax + a^۲ \xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} x = \frac{a}{۲}$$

برای خط با شیب مثبت می‌دانیم که از $(-a,f(a))$ یا $(-a,-a^۲)$ می‌گذرد و شیب آن برابر با $f'(-a)$ است.

$$f'(x) = -۲x \Rightarrow f'(-a) = ۲a$$

$$y-(-a^۲) = ۲a(x+a) \Rightarrow y = ۲ax + a^۲ \xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} x = -\frac{a}{۲}$$

ارتفاع مثلث OAB برابر عرض از مبدأ این خطوط یعنی $a^۲$ و قاعده آن برابر a است:

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(a^۲)(a) = \frac{a^۳}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۳ | خارج از کشور ۱۳۹۸ | متوسط

گزینه۳

حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در $x = \frac{۱}{۴}$ است:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h} = f'(\frac{۱}{۴})$$

$$f(x) = \frac{-(x+۱)}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-۱)\sqrt{x}+(x+۱)\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۱}{۴}) = \frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}\times\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = ۳$$

پاسخ: گزینه ۳ | گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

تابع f در $x = ۱$ پیوستگی چپ و در نتیجه مشتق چپ ندارد. بنابراین عبارت $f'_-(۱) = ۳$ نادرست است.

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۷% | ساده

گزینهٔ «۳»

برای اینکه تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد، شرط اول بررسی پیوستگی است، یعنی حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{۲a+b} \\ \lim_{x\to ۲^-} (x^۲ - x) = ۴-۲ = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{۲a+b} = ۲$$

شرط دوم برابری مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x = ۲$ است:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}} \xrightarrow{x=۲} f'_+(۲) = \frac{a}{۲\sqrt{۲a+b}} \\ ۲x-۱ \xrightarrow{x=۲} f'_-(۲) = ۴-۱ = ۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_+(۲)=f'_-(۲)} \frac{a}{۲\sqrt{۲a+b}} = ۳ \xrightarrow{\sqrt{۲a+b}=۲} \frac{a}{۲\times ۲} = ۳ \Rightarrow a = ۱۲$$

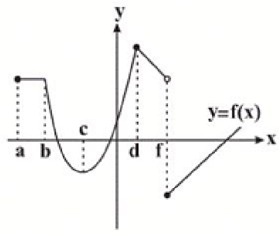
همچنین داریم: $\sqrt{۲a+b} = ۲ \Rightarrow ۲a+b = ۴ \xrightarrow{a=۱۲} b = -۲۰$

برای محاسبهٔ $f(۳)$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم:

$$x \geq ۲ \Rightarrow f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f(۳) = \sqrt{۱۲\times ۳ - ۲۰} = ۴$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۴۴% | ساده

در نقاط $\{b,d,f\}$ مشتق نداریم. در نقطهٔ$\{c\}$ مشتق باید صفر باشد، طول نقطهٔ c منفی است در بازهٔ a تاb مشتق صفر است،چون شیب صفر است. در بازهٔb تا c تابع نزولی و $f' < ۰$، در بازهٔc تاd تابع صعودی و $f' > ۰$، در بازهٔ d تا f تابع نزولی $f' < ۰$ و در بازهٔ $(f,+\infty)$ تابع صعودی و $f' > ۰$است. در بازه‌های d تا f و f تا $+\infty$ تابع خطی است لذا f' ثابت است.



پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۱% | متوسط

گزینه ی «۳»

تابع $y = \sqrt[۳]{k(x - x_۰)}$ فقط در $x = x_۰$ مشتق‌ناپذیر است. پس برای اینکه تابع f روی بازه $[۱,۳]$ مشتق‌پذیر باشد، لازم است که ریشه عبارت $ax + a - ۲$ یعنی $\frac{۲-a}{a}$ خارج از بازه مذکور باشد:

$$\begin{cases} \frac{۲ - a}{a} < ۱ \Rightarrow \frac{۲ - ۲a}{a} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \text{ Ä } a > ۱ & (۱) \\ \frac{۲ - a}{a} > ۳ \Rightarrow \frac{۲ - ۴a}{a} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < \frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

از اجتماع جواب‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$a \in (-\infty, \tfrac{۱}{۲}) \cup (۱, +\infty) = R - [\tfrac{۱}{۲}, ۱]$$

دقت کنید که به ازای $a = ۰$ هم تابع ثابت $y = \sqrt[۳]{-۲}$ روی R مشتق‌پذیر است.

پاسخ: گزینه ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۵% | ساده

گزینه «۱»

$$f'_{+}(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{|x - ۲|[۲x] - ۰}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲^+} \frac{(x - ۲)[۲x]}{x - ۲} = [۴^+] = ۴$$

$$f'_{-}(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{|x - ۲|[۲x] - ۰}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x - ۲)[۲x] - ۰}{x - ۲} = -[۴^-] = -۳$$

$$f'_{+}(۲) + f'_{-}(۲) = ۴ + (-۳) = ۱$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۱% | متوسط

برای مشتق‌گیری یک طرفه در چنین توابعی، کافی است در همسایگی نقطه موردنظر، مقدار عبارت جزء صحیح و علامت عبارت قدرمطلقی را تعیین کنیم و از تابع به‌دست آمده مشتق بگیریم. بنابراین در این سؤال داریم:

$$x \to (-۲)^+ : f(x) = -۲x^۲ + ۲x + ۴$$
$$\Rightarrow f'_{+}(-۲) = -۴x + ۲|_{x=-۲} = ۱۰$$

$$x \to ۲^- : f(x) = -x^۲ + x + ۲ \Rightarrow f'_{-}(۲) = -۲x$$
$$+۱\Big|_{x = ۲} = -۳$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه [۴,۱۶] برابر است با:

$$= \frac{f(۱۶)-f(۴)}{۱۶-۴} = \frac{۷\sqrt{۱۶}+۵۰-(۷\sqrt{۴}+۵۰)}{۱۲} = \frac{۱۴}{۱۲} = \frac{۷}{۶}$$

$$f(t) = ۷\sqrt{t}+۵۰ \Rightarrow f'(t) = \frac{۷}{۲\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow t = a \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'(a) = \frac{۷}{۲\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۲\sqrt{a}} = \frac{۷}{۶} \Rightarrow \sqrt{a} = ۳ \Rightarrow a = ۹$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

روش اول:

$$[۰,۱۰۰] \text{ آهنگ متوسط در } = \frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰} = \frac{۰-۴۰}{۱۰۰} = -\frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$V'(t) = ۸۰\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) = -\frac{۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{-۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) \Rightarrow t = ۵۰$$

روش دوم:

اگر $f(x) = ax^۲+bx+c$ باشدآنگاه آهنگ متوسط تغییر در بازه $[a,b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{a+b}{۲}$ برابر است؛ در نتیجه چون V یک تابع درجه ۲ است، لذا داریم:

$$[۰,۱۰۰] \text{ آهنگ متوسط در } = V'(t_۰) \Rightarrow t_۰ = \frac{۰+۱۰۰}{۲} = ۵۰s$$

پاسخ: گزینه ۱ | خارج از کشور ۱۴۰۱ | متوسط

گزینه «۱»

آهنگ متوسط تابع اول:

$$a = \frac{-۱-۰}{\frac{\pi}{۴}} = -\frac{۴}{\pi}$$

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x$$

$$b = \frac{۱-۰}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۴}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -۱$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۴۱% | ساده

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱} = \frac{۳۰-۲}{۲} = ۱۴$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲)-f(\alpha)}{۲-\alpha} = \frac{۰-\sqrt{۲-\alpha}}{۲-\alpha} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{\sqrt{۲-\alpha}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲-\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۰$$

$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ... ای در $x = ۰$

پاسخ: گزینه ۴

ساده | درصد پاسخگویی ۴۴% | قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[۱,۴]$ برابر است با:

$$\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{۲-۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

از طرفی آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = a$ برابر است با $f'(a) = \frac{۱}{۲\sqrt{a}}$.

در نتیجه داریم: $\frac{۱}{۲\sqrt{a}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط | خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{\sqrt{۹}+\frac{۱}{۵}-(\sqrt{۱}+۱)}{۴-۰} = \frac{۱+\frac{۱}{۵}}{۴}$$

$$= \frac{\frac{۶}{۵}}{۴} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

$$x = \frac{۳}{۲} \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } = f'(\frac{۳}{۲})$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}} - \frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{(\frac{۵}{۲})^{۲}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = ۰/۵ - ۰/۱۶ = ۰/۳۴$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = ۰/۳۴ - ۰/۳ = ۰/۰۴$$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۱% | قلم‌چی ۱۳۹۷

$$y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۸}{۵}-۱} - ۴\left(\frac{۳}{۵}\right)x^{\frac{۳}{۵}-۱} = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}\sqrt[۵]{x^{۳}} - \frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^{۲}}} \Rightarrow y' = \frac{۸x-۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^{۲}}}$$

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع، در نقطهٔ $x = ۰$ قائم است ($y'(۰) \to -\infty$)، همچنین از $y'(۰) \to -\infty$ می‌توان نتیجه گرفت که در اطراف $x = ۰$، مقدار y' منفی و در نتیجه تابع نزولی است، که این شرایط، تنها در گزینهٔ «۱» وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۴

ساده | درصد پاسخگویی ۴۸% | قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینهٔ «۴»

تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر است. پس در این نقطه پیوسته است و مشتق چپ و راست با هم برابرند:

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x) = \lim_{x\to ۰^{-}} f(x) = f(۰) \Rightarrow ۲ + a = b \quad (۱)$$

$$f'_{+}(۰) = f'_{-}(۰) \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۰+۱}} = ۲(۰) - b \Rightarrow b = -۱ \xrightarrow{(۱)} a = -۳$$

$$f'(ab) = f'(۳) \Rightarrow f'(۳) = \frac{۱}{\sqrt{۳+۱}} = \frac{۱}{۲}$$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۵ - زمان دار**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۱٪ | متوسط

۱) اگر مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + k$ در بازه $[0, 3]$ قرینه هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۸
۲) -۸
۳) ۱۰
۴) -۱۰

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

۲) بیشترین مساحت ممکن برای مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که محیط آنها برابر $\sqrt{2} + 2$ باشد، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\sqrt{2}$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

۳) اگر نقطه $A(-1, \frac{1}{2})$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3}$ باشد، طول و نوع نقطه اکسترمم نسبی دیگر تابع f کدام است؟

۱) ۱، ماکزیمم
۲) ۱، مینیمم
۳) ۳، ماکزیمم
۴) ۳، مینیمم

قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۴۵٪ | ساده

۴) کم‌ترین مقدار تابع با ضابطة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ در بازة $[1, 3]$ کدام است؟

۱) -۲۷
۲) -۱۲
۳) -۲۰
۴) -۱۱

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

۵) می‌خواهیم یک استوانه قائم بسازیم که حجم آن برابر 54π باشد. شعاع قاعدة استوانه چه‌قدر باشد تا مساحت کل آن مینیمم شود؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶٪ | دشوار

۶) حاصل‌ضرب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ برابر با $-\frac{81}{4}$ است. a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۹

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۸٪ | ساده

۷) تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + 3x + b$ در نقاط متمایزی به طول‌های $x = 1$ و $x = c$ دارای اکسترمم نسبی است. حاصل ac کدام است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) -۴
۴) -۶

گزینه های دام دار ۲ | قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴٪ | متوسط

۸) قیمت فروش هر خودکار ۴۰۰ تومان است درصورتی که روزانه x خودکار فروخته شود و هزینه‌ی تولید روزانه معادل $4x^2 - 800x + 20000$ تومان باشد، بیشترین سود به ازای تولید چند خودکار در روز به‌دست می‌آید؟

۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

۹) تقعر نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^2$ در بازه (a, b) روبه بالا می‌باشد. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{1}{4}$

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۱۲% | متوسط

(۱۰)

تقعر نمودار تابع $y = x\sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{9}$ در بازه $(a, +\infty)$ رو به پایین است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ **۲)** صفر **۳)** ۸ **۴)** $2\sqrt{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

(۱۱)

نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ برای تابع $y = \tan x + \cot x$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم **۲)** مینیمم

۳) عطف **۴)** عادی

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

(۱۲)

طول نقطه‌ی عطف تابع $x > 0$ و $y = (5 - \sqrt[3]{x^2})x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{27}{4}$ **۲)** $\frac{27}{8}$ **۳)** ۷ **۴)** ۶

گزینه های دام دار ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

(۱۳)

مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله‌ی $y = x\,|x^3 - 36x|$ کدام است؟

۱) $\{\pm 6, +\sqrt{6}\}$ **۲)** $\{\pm 6, \pm\sqrt{6}, 0\}$

۳) $\{\pm 6, \sqrt{6}, 0\}$ **۴)** $\{\pm\sqrt{6}\}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

(۱۴)

خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 20$ در نقطه $A(2, -26)$ روی آن، از نمودار عبور می‌کند. مقدار ماکزیمم نسبی نمودار f کدام است؟

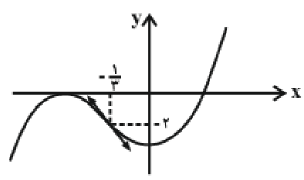
۱) ۲۴ **۲)** ۲۶

۳) ۲۸ **۴)** ۳۰

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

(۱۵)

اگر نمودار $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$ به‌صورت زیر باشد، $a + b$ کدام است؟



۱) ۹

۲) ۲۷

۳) ۵۴

۴) صفر

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

(۱۶)

اگر عرض نقطه عطف تابع $y = \frac{a}{x^2+1}$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ **۲)** -۲

۳) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ **۴)** $\frac{1}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۱% | دشوار

(۱۷)

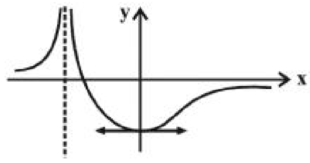
اگر $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ باشد، طول نقطه‌ی عطف تابع پیوسته $f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** عطف ندارد.

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | متوسط

(۱۸)

شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx-1}{x^2+cx+4}$ است، $f(-1)$ کدام است؟

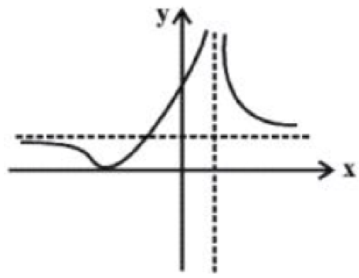


۱) صفر
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) -1
۴) $-\frac{3}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۴٪ | متوسط

(۱۹)

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+4}{x^2+bx+1}$ مطابق شکل زیر باشد، $a+b$ کدام است؟

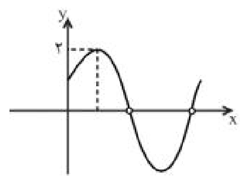


۱) ۲
۲) -2
۳) ۶
۴) -6

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۸٪ | دشوار

(۲۰)

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دوره تناوب است. a کدام است؟

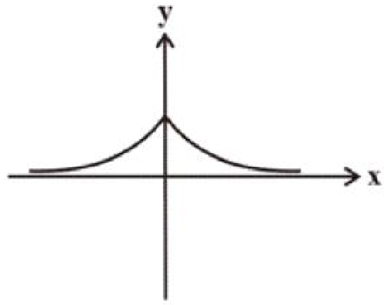


۱) -1
۲) ۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | متوسط

(۲۱)

ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام می‌تواند باشد؟



۱) $y = \frac{1}{|x|+1}$

۲) $y = \frac{1}{x^2+1}$

۳) $y = \frac{|x+1|}{x^2+1}$

۴) $y = \frac{x}{|x|+1}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۰٪ | متوسط

(۲۲)

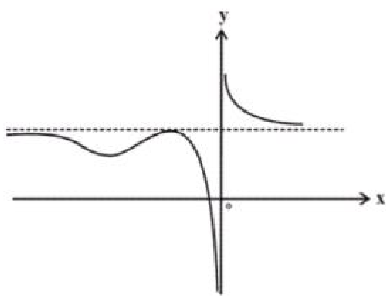
مجانب‌های نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = ax + \frac{x^2+1}{x-2}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کنند. فاصله مبدأ مختصات از خط شامل نقاط A و B کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۹٪ | دشوار

(۲۳)

شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{2x^5+x^2+x+a}{x^5}$ می‌باشد. مقدارکدام است؟



۱) ۲

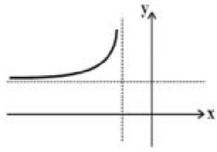
۲) ۱

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $-\frac{1}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

(۲۴)
بخشی از نمودار تابع $y=\frac{mx+۲}{x+m}$ در شکل زیر رسم شده است. حدود m کدام است؟



۱) $(۰,+\infty)$

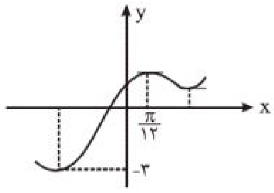
۲) $(\sqrt{۲},+\infty)$

۳) $R-[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$

۴) $(-۲,۲)$

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۴% | دشوار

(۲۵)
شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos ۴x+b\sin ۲x$ است. b کدام است؟



۱) ۲

۲) -۲

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[0,3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

فقط $x = 1$ در این بازه قرار دارد.

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه حساب می‌کنیم:

$f(0) = k$ و $f(1) = k - 2$ ،$f(3) = 18 + k$

پس ماکزیمم و مینیمم مطلق f در این بازه به‌ترتیب $k+18$ و $k-2$ هستند.

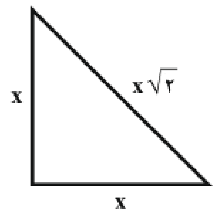
$$\xrightarrow{\text{قرینه همدیگرند.}} k - 2 + k + 18 = 0 \Rightarrow k = -8$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

گزینه «۲»

اگر محیط مثلث قائم‌الزاویه ثابت باشد، بیشترین مساحت آن زمانی رخ می‌دهد که مثلث متساوی‌الساقین نیز باشد:



$$\text{محیط} = 2x + x\sqrt{2} = x\left(2 + \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow S_{max} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۲% | متوسط

$$f'(x) = \frac{a(x^2+3) - 2x(ax+b)}{(x^2+3)^2}$$

چون $x = -1$، طول نقطه اکسترمم نسبی f است، پس f' در این نقطه صفر است.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4a - 2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 (1)$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a+b}{1+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -a + b = 2 (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} b = 1, a = -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2+3) - 2x(-x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 , 3$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

x		−۱		۳	
f′	+	۰	−	۰	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس طول نقطه اکسترمم نسبی دیگر f، $x = ۳$ و نوع آن مینیمم است.

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۴۵% — ساده

گزینهٔ «۱»

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow x = -۱, x = ۳$$

که فقط $x = ۳$ عضو $[۱, ۳]$ می‌باشد. اکنون مقدار تابع را به ازای $x = ۳$ و $x = ۱$ به دست می‌آوریم:

$$f(۳) = ۲۷ - ۲۷ - ۲۷ = -۲۷$$

$$f(۱) = ۱ - ۳ - ۹ = -۱۱$$

کم‌ترین مقدار ۲۷- است.

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۸% — متوسط

گزینهٔ «۳»

$$V = \pi r^۲ h = ۵۴\pi \Rightarrow h = \frac{۵۴}{r^۲}$$

حال ضابطه مساحت کل استوانه را برحسب r می‌نویسیم و سپس نقطه بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم: $S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲ = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۵۴}{r^۲})$

$$S = ۲\pi r^۲ + \frac{۱۰۸\pi}{r} \Rightarrow S' = ۴\pi r - \frac{۱۰۸\pi}{r^۲}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{۴\pi r^۳ - ۱۰۸\pi}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۴\pi r^۳ - ۱۰۸\pi = ۰$$

$$\Rightarrow r^۳ = \frac{۱۰۸}{۴} = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۶% — دشوار

$$D_f = [-a, a]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{a^۲ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = \frac{a^۲ - ۲x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

نقاط بحرانی: $f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{۲}}, \frac{-a}{\sqrt{۲}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a) = f(-a) = ۰ \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{a^۲}{۲} : \text{ماکزیمم‌مطلق} \\ f\left(-\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) = -\frac{a^۲}{۲} : \text{مینیمم‌مطلق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^۲}{۲}\right)\left(-\frac{a^۲}{۲}\right) = \frac{-۸۱}{۴} \Rightarrow a^۴ = ۸۱ \Rightarrow a = \pm ۳$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۴۸% — ساده

گزینهٔ «۴»

می‌دانیم در تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$، اگر تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ دارای اکسترمم نسبی باشد آنگاه طول آن نقطه باید در معادله $f'(x) = ۰$ صدق کند یعنی $f'(a) = ۰$ باشد. پس:

$$f(x) = \frac{x^۳}{۳} + ax^۲ + ۳x + b \Rightarrow f'(x) = x^۲ + ۲ax + ۳$$

$$f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۲a + ۴ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

$$f'(c) = ۰ \Rightarrow c^۲ + ۲ac + ۳ = ۰ \xrightarrow{a=-۲} c^۲ - ۴c + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \\ c = ۳ \end{cases}$$

چون دو نقطه $x = ۱$ و $x = c$ باید متمایز باشند بنابراین تنها $c = ۳$ قابل قبول است پس:

$$a = -۲, c = ۳ \Rightarrow ac = (-۲) \times ۳ = -۶$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

فرض می‌کنیم، تعداد x خودکار در روز فروش رود، بنابراین:

$$\text{درآمد روزانه} = R(x) = ۴۰۰x$$

$$\text{تابع سود} : P(x) = R(x) - C(x) = ۴۰۰x - (۴x^۲ - ۸۰۰x + ۲۰۰۰۰)$$

$$\Rightarrow P(x) = ۴۰۰x - ۴x^۲ + ۸۰۰x - ۲۰۰۰۰ = -۴x^۲ + ۱۲۰۰x - ۲۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به} x} P'(x) = -۸x + ۱۲۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۵۰$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

با توجه به دامنه تابع، $f''(x)$ را به دست آورده و تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{۳}{۴}x^۲ = x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۳}{۴}x^۲ \qquad \text{و} \qquad D_f = [۰, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۳}{۲}x = \frac{۳}{۲}(\sqrt{x} - x)$$

$$f''(x) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} - ۱\right) = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱-۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}\right)$$

$$۱ - ۲\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

$$۲\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x		0		$\frac{1}{4}$	
$f''(x) = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$			$+$ $\cup$	0	$-$ $\cap$

در این محدوده تابع تعریف نمی‌شود.

بنابراین جواب بازه $(۰, \frac{۱}{۴})$ است.

پاسخ: گزینه ۴

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۱۲% | متوسط

گزینهٔ «۴»

مشتق دوم را حساب و تعیین علامت می‌کنیم:

$\dots \frac{۴}{}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۲x}{۵}$

$\Rightarrow y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$

ریشه‌های y'' را محاسبه می‌کنیم:

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

حال داریم:

x		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$

تقعر تابع در بازه $(2\sqrt{2}, +\infty)$ رو به پایین است، پس کمترین مقدار a برابر $2\sqrt{2}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۱۹% — متوسط

$f(x) = \tan x + \cot x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - \cot^2 x$
$= \tan^2 x - \cot^2 x$

$\Rightarrow f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) + 2\cot x(1 + \cot^2 x)$

چون $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$ و $f''(\frac{\pi}{4}) = 8 > 0$ پس طبق آزمون مشتق دوم، نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ برای تابع f یک نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه ۲ — قلمچی ۱۳۹۶ — درصد پاسخگویی ۱۴% — متوسط

$y = (5 - \sqrt[3]{x^2})x^2 = 5x^2 - x^{\frac{8}{3}}$

$y' = 10x - \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$

$y'' = 10 - \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{27}{8}$

پاسخ: گزینه ۳ — گزینه های دام دار ۴ — قلمچی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۵% — دشوار

$$y = \begin{cases} x^4 - 36x^2 & ; -6 \le x \le 0 \text{ یا } x \ge 6 \\ -(x^4 - 36x^2) & ; x < -6 \text{ یا } 0 < x < 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 4x^3 - 72x & ; -6 < x \le 0 \text{ یا } x \ge 6 \\ -(4x^3 - 72x) & ; x < -6 \text{ یا } 0 < x < 6 \end{cases}$$

دقت کنید $y'_+(0) = 0$ و $y'_+(6) \neq y'_-(6)$ و $y'_+(-6) \neq y'_-(-6)$

$$y'' = \begin{cases} 12x^2 - 72 & ; -6 < x < 0 \text{ یا } x > 6 \\ -(12x^2 - 72) & ; x < -6 \text{ یا } 0 < x < 6 \end{cases}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

دقت کنید که y'' در $x = \pm 6$، $x = \pm\sqrt{6}$ و $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد اما $x = \pm 6$ درخط مماس وجود ندارد، پس عطف نیست. پس مجموعه طول نقاط عطف برابر $\{0, \pm\sqrt{6}\}$ است.

x		-6		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		6	
y''	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y				عطف		عطف		عطف			

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۵% — متوسط

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6x + 2b$

نقطه A، نقطه عطف تابع f ...

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2c + 20 = -26$$

$$\Rightarrow 8 - 24 + 2c + 46 = 0 \Rightarrow c = -15$$

پس ضابطه f' به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

		-1		5	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

مقدار ماکزیمم نسبی f برابر است با:

$$f(-1) = 28$$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۱۹٪ — متوسط

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$$

$$f(-\tfrac{1}{3}) = -2$$

$$f(-\tfrac{1}{3}) = -\frac{a}{27} + \frac{b}{9} - 4 = -2 \Rightarrow \frac{-a+3b}{27} = 2 \Rightarrow -a + 3b = 54 \quad (1)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(-\tfrac{1}{3}) = -2a + 2b = 0 \Rightarrow a = b \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow a = b = 27 \Rightarrow a + b = 54$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۱۳٪ — متوسط

$$y' = \frac{-2ax}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2a(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(-2ax)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2a(x^2+1) - 4x(-2ax)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2a(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

حالا در تابع مقدار x^2 را برابر $\frac{1}{3}$ قرار می‌دهیم تا عرض نقطه عطف بدست آید:

$$y(x^2 = \tfrac{1}{3}) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۶ — درصد پاسخگویی ۱۱٪ — دشوار

ریشه‌های مضاعف مشتق اول، نقاط عطف تابع $f(x)$ می‌باشند، بنابراین $x = 2$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۶ — درصد پاسخگویی ۱۳٪ — متوسط

طول مجانب قائم منفی است و تابع در دو همسایگی آن به $+\infty$ میل می‌کند. پس مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد و باید Δ مخرج برابر صفر باشد:

$$c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm 4$$

$$\begin{cases} c = 4 : x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 & \text{ق ق} \\ c = -4 : x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند $f(x)$ یک مجانب افقی $y = 0$ دارد. پس باید درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر باشد. یعنی $a = 0$، پس:

$$f(x) = \frac{bx-1}{(x+2)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{b(x+2)^2 - 2(x+2)(bx-1)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{b(x+2) - 2(bx-1)}{(x+2)^3} = \frac{-bx+2b+2}{(x+2)^3}$$

$$\xrightarrow{f'(0)=0} -b(0) + 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = \frac{-x-1}{(x+2)^2} \Rightarrow f(-1) = 0$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۱۴٪ — متوسط

چون شکل تابع اطراف مجانب قائم هر دو به $+\infty$ میل می‌کند، پس باید مخرج ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرفی طول مجانب مثبت است، پس $b = +2$ نمی‌تواند باشد و $b = -2$ باید باشد.

از طرفی با توجه به نمودار و مماس بودن نمودار بر محورx ها صورت ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\Delta_{\text{صورت}} = 0 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4$$

چون ریشه‌ی صورت منفی است، پس $a = 4$ قابل قبول است.

پس: $a + b = 4 - 2 = 2$

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۸٪ — دشوار

روی نمودار، تابع در نقاطی تعریف نشده است، بنابراین این نقاط جزء دامنه تابع نیستند. چون تابع کسری است، این بدین معنی است که طول این نقاط ریشه‌های مخرج می‌باشند. از طرفی چون تابع در این نقاط مجانب قائم ندارد، طول این نقاط ریشه صورت نیز می‌باشند، پس:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \ (\text{یک جواب معادله})$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \ (\text{ریشه صورت}) \Rightarrow a \sin \frac{3\pi}{2} + b = 0$$

$$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b$$

لذا تابع به صورت:

$$y = \frac{a \sin 2x + a}{\sin x + \cos x} = \frac{a(1+\sin 2x)}{\sin x + \cos x} = \frac{a(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x}$$

$$= a(\sin x + \cos x) = a\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بیشترین مقدار تابع برابر $a\sqrt{2}$ است از طرفی طبق شکل بیشترین مقدار تابع ۲ است، پس:

$$a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

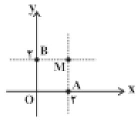
پاسخ: گزینه ۱ — دام دار ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۱۵٪

در نمودار $f(۰) \neq ۰$ است پس گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند صحیح باشد. نمودار در $x = ۰$ مشتق ناپذیر است پس گزینه‌ی (۲) حذف می‌شود. ($y = \frac{۱}{۱+x^۲}$ روی R مشتق‌پذیر است.) همچنین تابع گزینه‌ی (۳) در $x = -۱$ درمشتق‌ناپذیر است که با توجه به نمودار این گزینه نیز نمی‌تواند صحیح باشد. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۰% | متوسط

$$f(x) = \frac{(a+۱)^۲ - ۲ax + ۱}{x-۲} \xrightarrow[\text{است}]{\text{تابع هموگرافیک}} a = -۱$$

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانب افقی} : y = ۲ \\ \text{مجانب قائم} : x = ۲ \end{cases}$$



چهارضلعی AOBM مربع است، پس فاصله مبدأ از خط AB نصف قطر آن یعنی $\sqrt{۲}$ خواهد بود

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

گزینه‌ی «۳»

مجانب افقی تابع خط $y=۲$ می‌باشد. زیرا $\lim_{x \to \infty} \frac{۲x^۵+x^۲+x+a}{x^۵} = ۲$ است. با توجه به نمودار، تابع بر خط $y=۲$ مماس است. پس معادله‌ی تقاطع دارای ریشه مضاعف است.

$$\frac{۲x^۵+x^۲+x+a}{x^۵} = ۲ \Rightarrow ۲x^۵ + x^۲ + x + a = ۲x^۵$$

$$x^۲ + x + a = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱ - ۴a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

گزینه «۲»

تابع داده شده اکیداً صعودی است، بنابراین باید $y' > ۰$ باشد:

$$y' = \frac{m^۲-۲}{(x+m)^۲} > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۲ \Rightarrow m > \sqrt{۲} \text{ یا } m < -\sqrt{۲}$$

اما خط مجانب افقی نمودار تابع $y = m$ است و با توجه به شکل واضح است که $m > ۰$ می‌باشد. بنابراین محدوده قابل قبول m، $(\sqrt{۲}, +\infty)$ است.

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۴% | دشوار

در $x = \frac{\pi}{۱۲}$ مماس افقی است، پس $f'(\frac{\pi}{۱۲}) = ۰$ است.

$$f'(x) = -۴a \sin ۴x + ۲b \cos ۲x$$

$$f'(\frac{\pi}{۱۲}) = ۰ \Rightarrow \frac{-۴a\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۲b\sqrt{۳}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -۲a + b = ۰ \Rightarrow b = ۲a \qquad (*)$$

مقدار تابع به ازای اولین ریشه‌ی منفی $y' = ۰$ برابر ۳- است.

$$y' = ۰ \Rightarrow -۴a \times ۲ \sin ۲x \cos ۲x + ۲b \cos ۲x = ۰$$

$$۲ \cos ۲x(-۴a \sin ۲x + b) = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = ۰$$

$$\begin{cases} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ -۴a\sin ۲x + b = ۰ \xrightarrow[*]{b=۲a} \end{cases}$$

$$\sin ۲x = \frac{۱}{۲} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{k=-۱} x = -\frac{\pi}{۴}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = -\pi + \frac{\pi}{۱۲}$$

$$x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = \frac{-\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۲}$$

واضح است که نخستین ریشه‌ی منفی $-\frac{\pi}{۴}$ است و باید مقدار تابع به ازای آن ۳- باشد.

$$-a - b = -۳ \overset{*}{\rightarrow} -a - ۲a = -۳ \Rightarrow \begin{matrix} a = ۱ \\ b = ۲ \end{matrix}$$