نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ فصل ۱ آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۶۳% | ساده

۱) نقطه $(۱,۰)$ روی نمودار تابع f، به کدام نقطه روی نمودار تابع $g(x) = ۱ + f(۲x)$ تبدیل می‌شود؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ **۲)** $(۱,۱)$ **۳)** $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ **۴)** $(۱,۲)$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

۲) اگر باقی مانده تقسیم $ax^۵ + bx^۴ + ۲x$ بر $x + ۱$ برابر ۴ باشد، باقی‌مانده تقسیم $x^۳ + ax^۲ - ۲bx$ بر $x - ۲$ کدام است؟

۱) ‎-۱۶ **۲)** ‎-۸
۳) ۸ **۴)** ۱۶

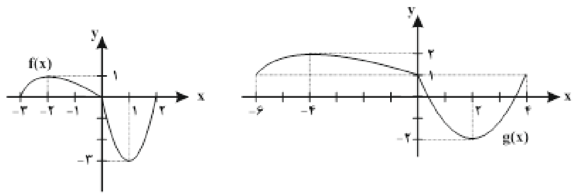
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۸% | ساده

۳) نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ۳x - ۳x^۲$ از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول و سوم **۲)** اول و چهارم **۳)** دوم و چهارم **۴)** دوم و سوم

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۷۱% | ساده

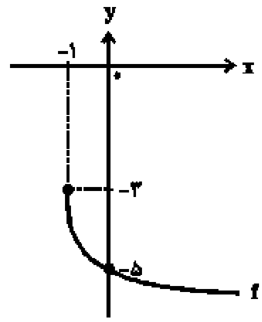
۴) با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟

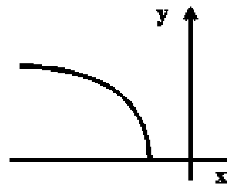


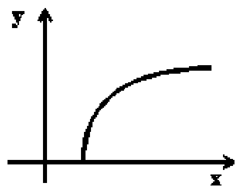
۱) $g(x) = f\left(\frac{x+۲}{۲}\right)$
۲) $g(x) = f(۲x) + ۱$
۳) $g(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$
۴) $g(x) = f(x + ۲) + ۲$

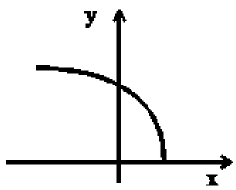
گزینه های دام دار ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳٪ | متوسط

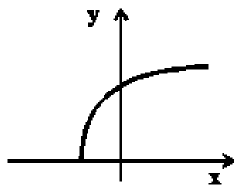
۵) نمودار تابع $f(x) = a\sqrt{x+b} + c$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = \sqrt{abx+c}$ کدام است؟



۱) 

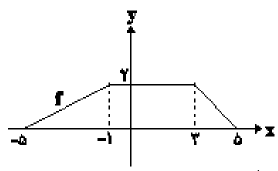
۲) 

۳) 

۴) 

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | متوسط

۶) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(2x+a)$ حداقل در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟



۱) [-۲۰, ۱۵]
۲) [-۱۵, ۱۵]
۳) [-۱۰, ۲۰]
۴) [-۱۵, ۲۰]

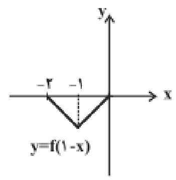
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | متوسط

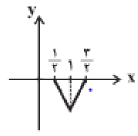
۷) علی برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x - 4)$، به اشتباه ابتدا طول تمام نقاط روی نمودار تابع f را ۲ برابر می‌کند و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهد. او با کدام انتقال بر روی نمودار حاصل می‌تواند اشتباه خود را اصلاح کند؟

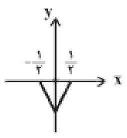
۱) ۲ واحد به سمت راست
۲) ۴ واحد به سمت راست
۳) ۸ واحد به سمت راست
۴) ۲ واحد به سمت چپ

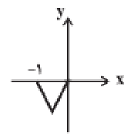
ساده | درصد پاسخگویی ۳۴% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۲

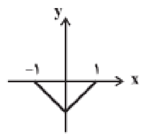
۸) اگر شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y = f(1-x)$ باشد، نمودار تابع $y = f(2x)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلم‌چی ۱۴۰۰

۹) نقطهٔ $A(1,-2)$ برروی نمودار $g(x) = f(x-1)+2$، بعد از تبدیل این نمودار به $h(x) = f(mx+2)+n$ به نقطهٔ $A'(4,-3)$ انتقال یافته است. حاصل $n-m$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۴% | قلم‌چی ۱۴۰۰

۱۰) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ باشد. تابع g از روی تابع f با انتقال یک واحد به چپ و سپس قرینه‌ی نمودار حاصل نسبت به محور x ها و در انتها با انتقال $\frac{1}{2}$ واحد به بالا در راستای محور y ها به دست می‌آید. x_0 در معادله‌ی $g(2x_0) = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{4}$ ۲) $\frac{-3}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{-5}{8}$

ساده | درصد پاسخگویی ۴۷% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱۱) در تجزیه $x^{10}+32$ کدام عامل موجود است؟

۱) $x-2$ ۲) $x+2$ ۳) x^2+2 ۴) x^2+4

ساده | درصد پاسخگویی ۳۷% | قلم‌چی ۱۳۹۷

۱۲) اگر باقی‌مانده تقسیم $p(x-2)+4$ بر $x-3$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام باشد تا عبارت $g(x) = x^{16}+5p(x+2)-m$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۶- ۲) ۸-
۳) ۸ ۴) ۱۶

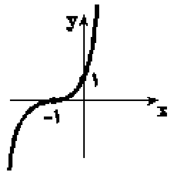
ساده | درصد پاسخگویی ۴۳% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱۳) در کل مجموعه $(-\infty,a)-\{b\}$، نمودار تابع $f(x) = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3$ قرار می‌گیرد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱-

قلمچی ۱۳۹۹ | دشوار

۱۴) نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ به‌صورت مقابل می‌باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۶
۳) ۲
۴) ۴

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ | متوسط

۱۵) تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ با دامنه‌ی $[0 , 2\pi]$، در بازه‌ی A با بیشترین طول، صعودی است. طول بازه‌ی A کدام است؟

۱) π
۲) $\frac{2\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{4\pi}{3}$

قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۵٪ | ساده

۱۶) اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^2 + mx - 2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴-
۳) ۱-
۴) ۴

قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱۰٪ | دشوار

۱۷) بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

۱) $x=1$
۲) $x=2$
۳) $x=3$
۴) $x=4$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳٪ | دشوار

۱۸) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P_1(x)$ بر $x^2 - 3x + 5$ برابر $3 - 2x$ و چندجمله‌ای $P_2(x)$ بر $x^2 - 3x + 5$ برابر $2x - 4$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $P_1(x)P_2(x)$ بر $ax^2 - 3x + 5$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۹٪ | متوسط

۱۹) اگر مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $5x^4 - 3x^2 + ax - 1$ بر $x+1$ برابر با ۷ باشد، a کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱٪ | دشوار

۲۰) در تقسیم $x^5 + 1$ بر $x^2 + x + 1$ ، باقی‌مانده به صورت $ax + b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۲-
۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۶۳% | ساده

اگر تبدیل یافته (۱,۰) را روی نمودار g ، $(x_۰,y_۰)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x_۰ = ۱ \Rightarrow x_۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$g(x_۰) = ۱ + f(۲x_۰) = ۱ + f(۱) = ۱ + ۰ = ۱$$

$$\Rightarrow (x_۰,y_۰) = (\tfrac{۱}{۲},۱)$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۲% | متوسط

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ : a(-۱)^{۵} + b(-۱)^{۴} + ۲(-۱) = ۴$$

$$\Rightarrow a - b = -۶ (۱)$$

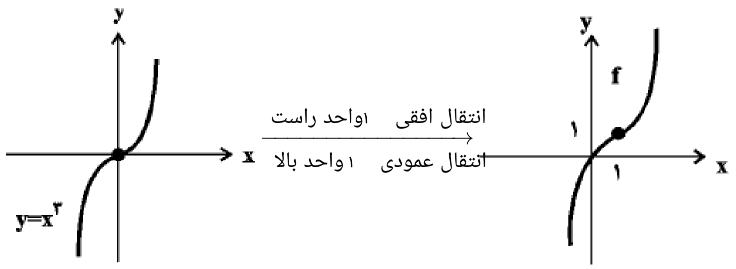
$$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ : r = (۲)^{۳} + a(۲)^{۲} - ۲b(۲) = ۸ + ۴a - ۴b$$

$$= ۸ + ۴(a - b) \xrightarrow{(۱)} ۸ + ۴(-۶) = -۱۶$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۸% | ساده

$$f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱ + ۱$$

$$f(x) = (x - ۱)^{۳} + ۱$$



پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۷۱% | ساده

دامنه تابع $f(x)$ دو برابر شده است؛ یعنی در راستای محور xها، دو برابر منبسط شده است. همچنین یک واحد در راستای محورyها به سمت بالا منتقل شده است. بنابراین رابطه $g(x) = f(\frac{x}{۲}) + ۱$ صحیح است.

پاسخ: گزینه ۱ | ... دام دار ۳ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

گزینهٔ «۱»

دامنه تابع f به‌صورت $[-b,+\infty)$ می‌باشد که با توجه به نمودار، دامنه آن $[-۱,+\infty)$ است. پس: $-b=-۱ \Rightarrow b=۱$

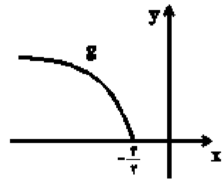
مقدار تابع در $x=-۱$ برابر -۳ است، داریم:

$$f(-۱)=c=-۳ \Rightarrow f(x)=a\sqrt{x+۱}-۳$$

عرض از مبدأ نیز برابر -۵ است.

$$\Rightarrow f(۰)=a-۳=-۵ \Rightarrow a=-۲$$

حال نمودار تابع $g(x)=\sqrt{abx+c}=\sqrt{-۲x-۳}$ به‌صورت زیر خواهدبود. دقت کنید که دامنه آن $[-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ است.



همچنین می‌توان گفت نمودار g از انتقال ۳ واحد نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به سمت راست و سپس $-\frac{۱}{۲}$ برابر کردن طول نقاط آن به‌دست می‌آید.

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۲٪ | متوسط

نقاط $(۵,۰)$ و $(-۵,۰)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$، به‌ترتیب به نقاط $(-\frac{a-۵}{۲},۰)$ و $(-\frac{a+۵}{۲},۰)$ روی نمودار تابع $y=f(۲x+a)$ تبدیل می‌شوند. برای اینکه نمودار دو تابع حتماً برخورد داشته باشند، کافی است حداقل یکی از نقاط تبدیل شده در بازه $[-۵,۵]$ قرار داشته باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -۵ \le -\frac{a+۵}{۲} \le ۵ \Rightarrow -۵ \le \frac{a+۵}{۲} \le ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \le a+۵ \le ۱۰ \Rightarrow -۱۵ \le a \le ۵ & (۱) \\ -۵ \le -\frac{a-۵}{۲} \le ۵ \Rightarrow -۵ \le \frac{a-۵}{۲} \le ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \le a-۵ \le ۱۰ \Rightarrow -۵ \le a \le ۱۵ & (۲) \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های (۱) و (۲)، بازه $[-۱۵,۱۵]$ است.

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | متوسط

گزینه «۲»

ابتدا تغییراتی را که بر روی تابع f صورت گرفته اعمال می‌کنیم.

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط ۲ برابر شود}} g(x)=f(\tfrac{۱}{۲}x)$$
$$\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}} g(x-۴)$$

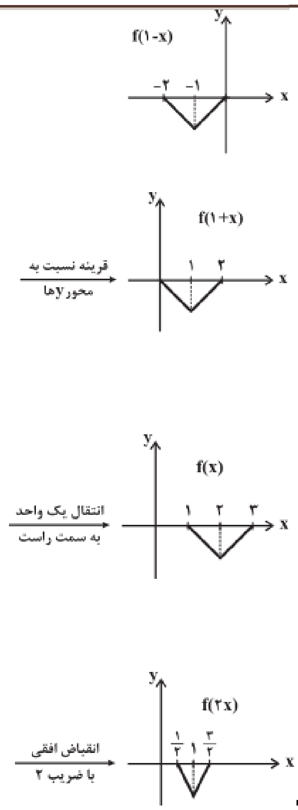
$$=f(\tfrac{۱}{۲}(x-۴))=f(\tfrac{۱}{۲}x-۲)$$

حال برای آنکه تابع حاصل به تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x-۴)$ تبدیل شود، آن را ۴ واحد دیگر به سمت راست انتقال می‌دهیم.

$$h(x)=f(\tfrac{۱}{۲}x-۲) \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}} h(x-۴)$$
$$=f(\tfrac{۱}{۲}(x-۴)-۲)$$

$$=f(\tfrac{۱}{۲}x-۲-۲)=f(\tfrac{۱}{۲}x-۴)$$

پاسخ: گزینه ۱ | گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۴٪ | ساده



پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۱۶% | متوسط

گزینهٔ «۲»

با توجه به عرض نقطهٔ A' واضح است که نمودار g برای تبدیل به h یک واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است. بنابراین مقدار n برابر ۱ است.

از طرفی نقطهٔ A بر روی نمودار تابع g قرار دارد. پس:

$$g(۱) = -۲ \Rightarrow f(۱-۱)+۲ = -۲ \Rightarrow f(۰) = -۴$$

با توجه به اطلاعات به دست آمده می‌دانیم که تابع $h(x) = f(mx+۲)$ نیز به ازای طول نقطهٔ $A'(۴,-۳)$ برابر صفر خواهد بود.

$$x = ۴ \xrightarrow{y=f(mx+۲)} ۴m+۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow n-m = ۱+\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۴۴% | ساده

گزینه «۲»

ابتدا تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = \sqrt{x+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور ها}} y = -\sqrt{x+۱}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۲}\text{واحد به بالا}} y = -\sqrt{x+۱}+\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\sqrt{x+۱}+\frac{۱}{۲}$$

$$g(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+1=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{-3}{4}$$

پس ریشه‌ی معادله‌ی $g(2x)=0$ برابر با $x=\frac{\frac{-3}{4}}{2}=\frac{-3}{8}$ است

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۷% | ساده

گزینه «۳»

می‌دانیم a^5+b^5 بر $a+b$ بخش‌پذیر است. پس داریم:

$$x^{10}+32=(x^2)^5+2^5=(x^2+2)Q(x)$$

پس $x^{10}+32$ بر x^2+2 بخش‌پذیر است.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۷% | ساده

$x-3=0 \Rightarrow x=3; \quad r=p(3-2)+4=7 \Rightarrow p(1)=3$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

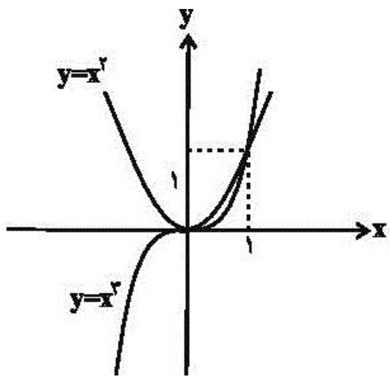
$\Rightarrow g(-1)=(-1)^{16}+5p(1)-m=1+15-m=0$

$\Rightarrow m=16$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۴۳% | ساده

گزینه «۲»

نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. دقت کنید که $x=0$ و $x=1$ طول نقاط مشترک دو نمودار است.



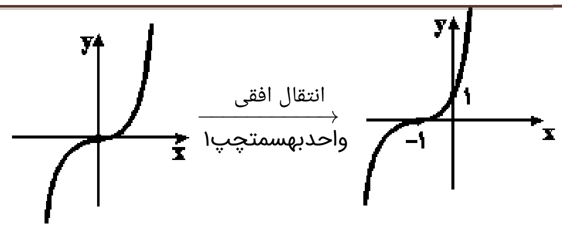
با توجه به نمودارها، مشخص است که مجموعه موردنظر به صورت $(-\infty,1)-\{0\}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=1$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

گزینه «۲»

نمودار مورد نظر، مربوط به تابع $y=(x+1)^3$ می‌باشد.



$y = (x+۱)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x + ۱$

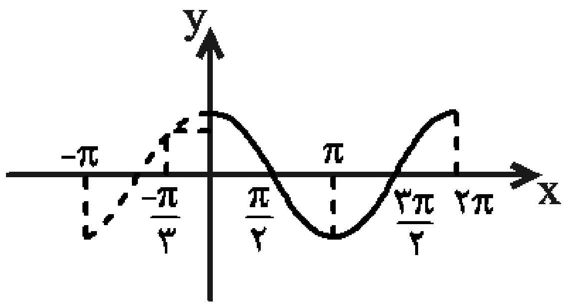
$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۶$

پاسخ: گزینه ۲ — سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ — متوسط

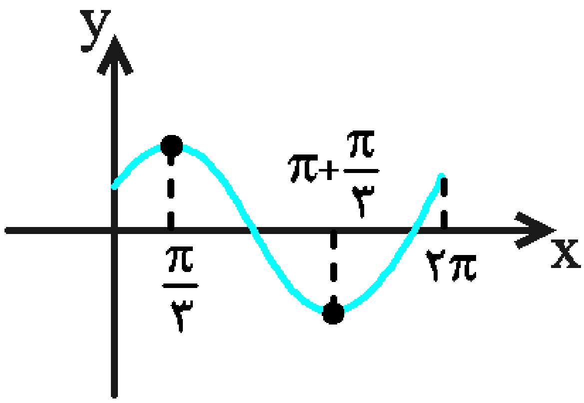
گزینه «۲»

به نمودار تابع $y = \cos x$ توجه کنید. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۳})$ باید نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست

انتقال دهیم. (برای رسم محور yها را مطابق شکل در ابتدا خط $x = \frac{-\pi}{۳}$ قرار دهید و شکل را رسم کنید.)



نقاطی که بیشترین و کمترین مقدار برای تابع به دست می‌دهند را مشخص می‌کنیم. با توجه به نمودار تابع f:



صعودی $[\pi + \frac{\pi}{۳} , ۲\pi]$ و $[۰ , \frac{\pi}{۳}]$: در بازه‌های

نزولی $[\frac{\pi}{۳} , \pi + \frac{\pi}{۳}]$: در بازه‌ی

چون طول بازه‌ی A بیشترین است، پس از میان دو بازه، بازه‌ی $[\frac{۴\pi}{۳} , ۲\pi]$، طول بیشتری دارد و برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۵۵% — ساده

گزینه «۲»

باقی‌مانده تقسیم f(x) بر x + ۱ برابر f(−۱) است.

$\Rightarrow f(-۱) = ۱ - m - ۲ = ۲ \Rightarrow m = -۳$

$\Rightarrow f(x) = x^{۲} - ۳x - ۲$

باقی‌مانده تقسیم f(x) بر x − ۱ برابر f(۱) است

$f(1) = 1 - 3 - 2 = -4$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱۰٪ | دشوار

می‌دانیم که بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دومی که در آن ضریب x^2 عددی منفی است، برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2a} = \frac{-2}{a}$$

$$\Rightarrow y_S = f(-\tfrac{2}{a}) = a(-\tfrac{2}{a})^2 + 4(-\tfrac{2}{a}) + 5 = \frac{-4}{a} + 5 \quad (*)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۹ است، یعنی:

$$y_S = 9 \xrightarrow{(*)} \frac{-4}{a} + 5 = 9 \Rightarrow a = -1$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2(-1)} = 2$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

پاسخ: گزینه ۳ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳٪ | دشوار

اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P_1(x)$ برابر $R_1(x)$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P_2(x)$ برابر $R_2(x)$ باشد، در آن صورت باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $P_1(x)P_2(x)$ برابر است با حاصل تقسیم $R_1(x)R_2(x)$ بر $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} R_1(x) = -2x - 3 \\ R_2(x) = 2x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow R_1(x)R_2(x) = (-2x-3)(2x-4)$$

$$= -4x^2 + 2x + 12$$

$$\begin{array}{l|l} -4x^2 + 2x + 12 & x^2-3x+5 \\ \cline{2-2} -(-4x^2 + 2x + 12) & -4 \\ \cline{1-1} -10x + 32 & \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x) = -10x + 32 \Rightarrow R(3) = 2$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۹٪ | متوسط

گزینه‌ی «۴»

$$5x^4 - 3x^2 + ax - 1 = (x+1)Q(x) + R$$

چون مجموع ضرایب $Q(x)$ برابر ۷ است، پس $Q(1) = 7$. در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 5 - 3 + a - 1 = 2 \times 7 + R \Rightarrow a = 13 + R \\ x = -1 \Rightarrow 5 - 3 - a - 1 = 0 + R \Rightarrow 1 - a = R \end{array}\right\} \Rightarrow a = 7$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۳ | درصد پاسخگویی ۱٪ | دشوار

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} & x^3 - x^2 + 1 \\ -(x^5 + x^4 + x^3) & \\ \cline{1-1} -x^4 - x^3 + 1 & \\ -(-x^4 - x^3 - x^2) & \\ \cline{1-1} x^2 + 1 & \\ -(x^2 + x + 1) & \\ \cline{1-1} -x = ax + b & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

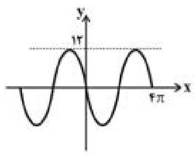
گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

۱
اگر $\tan\alpha = ۲m - ۳$ و $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{۳\pi}{۴}$ باشد، حدود m کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{\pi}{۲})$

۱) $(۱,۲)$
۲) $(-\infty,۱)$
۳) $(۲,+\infty)$
۴) $R-[۱,۲]$

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

۲
قسمتی از نمودار تابع $f(x) = b\cos(\frac{\pi}{۲} - ax)$ به‌صورت شکل زیر است. کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲۳}{۲}$
۲) $\frac{۲۵}{۲}$
۳) $\frac{۲۳}{۲}$
۴) $-\frac{۲۵}{۲}$

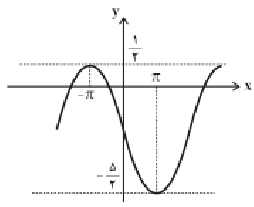
قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۳% | ساده

۳
شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۷% | متوسط

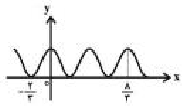
۴
شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۷}{۴}$
۴) $-\frac{۹}{۴}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

۵) قسمتی از نمودار تابع $y = ۲ + a\cos(b\pi x)$ به‌صورت زیر است. حاصل $|ab|$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

۶) چند نقطه در بازه $(-\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۷})$، عضو دامنه تابع $f(x) = \tan\frac{\pi}{x}$ <u>نیست</u>؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۵

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

۷) وزنه‌ای به یک فنر متصل است به‌طوری که پیوسته بالا و پایین می‌رود. تغییر مکان وزنه از نقطه‌ی تعادل بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $d = -۳/۵\cos(۲\pi t)$ به‌دست می‌آید که d برحسب سانتی‌متر می‌باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام دهد؟

۱) ۱
۲) ۲π
۳) ۲
۴) ۰/۵

قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

۸) اگر تابع $f(x) = \tan ۳x$ باشد، دوره تناوب نمودار تابع $f - \frac{۱}{f}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۶}$
۳) $\frac{\pi}{۱۲}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶% | دشوار

۹) تابع متناوب f با دامنه R و دوره تناوب ۲، در بازه $[۰,۲)$ به‌صورت $f(x) = \begin{cases} x ; ۰ \le x < ۱ \\ \sqrt{۲-x} ; ۱ \le x < ۲ \end{cases}$ تعریف شده است. مقدار $f(-۸/۸۱)$ کدام است؟

۱) ۰/۹
۲) ۰/۸۱
۳) ۰/۰۹
۴) ۰/۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۳% | ساده

۱۰) اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = a\sin\pi ax + ۴$ برابر ۸ است. دوره تناوب تابع کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۴% | ساده

۱۱) حاصل عبارت $\sin^۲(۶۷/۵^\circ) - \sin^۲(۲۲/۵^\circ)$ برابر با کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

۱۲) اگر انتهای کمان x در ناحیه اول دایره مثلثاتی بوده و داشته باشیم: $\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x} = ۵$، آن‌گاه مقدار $\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۱۳) جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x = ۱ - \sin ۲x$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. کدام شکل هندسی درست می‌شود؟

۱) ۶ضلعی
۲) مثلث قائم‌الزاویه
۳) مربع
۴) مستطیل

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۷% | متوسط

(۱۴) اگر $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\tan(\alpha+\beta)=2-\sqrt{3}$ باشد، مقدار زاویه α کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{7\pi}{12}$
۲) $-\frac{\pi}{4}$
۳) $-\frac{5\pi}{12}$
۴) $\frac{\pi}{6}$

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

(۱۵) جواب کلی معادله $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{3k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{4k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

گزینه های دام دار ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

(۱۶) انتهای کمان‌های x از معادلهٔ $\sin 2x\tan x=\sin 2x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رئوس کدام چندضلعی هستند؟

۱) شش ضلعی
۲) مربع
۳) مستطیل
۴) ذوزنقه

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

(۱۷) کدام گزینه جزء جواب‌های کلی معادله $\cos 5x=\sin x$ می‌باشد؟ $(k\in Z)$

۱) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$
۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$
۳) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$
۴) $\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{8}$

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۶% | دشوار

(۱۸) جواب کلی معادله‌ی $\tan(2x+1)\tan(x-1)=1$، کدام است؟ $(k\in Z)$

۱) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$
۳) $k\pi+\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

(۱۹) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x=4+5\cos x$ کدام است؟ $(k\in Z)$

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$
۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$
۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$
۴) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

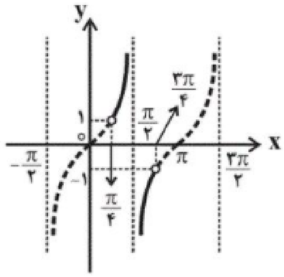
(۲۰) اگر $a\tan 50^\circ+\tan 20^\circ=\tan 70^\circ$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه های دام دار ۱ | قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

ابتدا شکل تابع $y=\tan\alpha$ را در بازه $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ به‌صورت زیر رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار بالا داریم:

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \tan\alpha<-1 \text{ یا } \tan\alpha>1$$

$$\Rightarrow 2m-3<-1 \text{ یا } 2m-3>1 \Rightarrow m<1 \text{ یا } m>2$$

$$\Rightarrow m\in R-[1,2]$$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۹% | متوسط

$$f(x)=b\cos(\frac{\pi}{2}-ax)=b\sin ax$$

$$T=\frac{2\pi}{|a|}=4\pi\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

تابع دارای ماکزیمم مقدار ۱۲ می‌باشد.

$$f_{max}=|b|=12\Rightarrow b=\pm 12$$

با توجه به نمودار چون در سمت راست $x=0$، نمودار کاهشی است، پس a و b هم‌علامت نیستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-12\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{-23}{2} \text{ یا } \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=12\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{23}{2}$$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۳% | ساده

گزینه «۲»

با توجه به نمودار داده شده نقطه‌ی $(0\ ,\ 3)$ روی این تابع قرار دارد. پس:

$$y=a+\sin(b\pi x)\xrightarrow[\text{}]{(0\ ,\ 3)\in\text{تابع}} 3=a+\sin 0\rightarrow a=3$$

از طرفی با توجه به نمودار تابع واضح است که دوره‌ی تناوب این تابع برابر $5-1=4$ است، پس:

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=4\rightarrow 2\pi=4|b|\pi\rightarrow |b|=\frac{1}{2}\rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

اما $b=\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست، زیرا در این حالت داریم:

$$f(x)=3+\sin\frac{\pi}{2}x\xrightarrow{x=1} f(1)=3+\sin\frac{\pi}{2}=4$$

که طبق نمودار، $f(1)<3$، لذا $b=-\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$f(x)=3+\sin(-\frac{\pi}{2}x)=3-\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{25}{3}} f(\frac{25}{3})=3-\sin\frac{25\pi}{6}=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۷٪ | متوسط

در توابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ، فاصله افقی دو نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی‌اش برابر نصف دوره تناوب تابع است. بنابراین در این سؤال $\frac{T}{2} = 2\pi$ است. $\Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

همچنین داریم: $c = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} \Rightarrow c = \frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)}{2} = -1$

از طرفی برای به‌دست آوردن a نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{max} = |a| + c = |a| - 1 \xrightarrow{y_{max}=\frac{1}{2}} |a| = \frac{3}{2}$$

حال با توجه به اینکه در همسایگی $x = 0$ ، تابع f نزولی است، باید ab مقداری منفی داشته باشد. بنابراین ضابطه تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = -\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6} - 1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۸٪ | متوسط

گزینهٔ «۴»

$$y_{min} = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به نمودار، $\frac{5}{2}$ دورهٔ تناوب این تابع برابر $\frac{10}{3} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$ است؛ در نتیجه داریم: $\frac{5}{2}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2\times 10}{5\times 3} = \frac{4}{3}$

از طرفی دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|}$.

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

پاسخ: گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۳٪ | متوسط

گزینهٔ «۴»

$$D_f = \{x \in R \frac{\pi}{x} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \neq k + \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

حال با فرض اینکه مقادیر x در بازه $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{7}\right)$ باشند، داریم:

$$-\frac{2}{3} < \frac{1}{k+\frac{1}{2}} < -\frac{1}{7} \Rightarrow -7 < k + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{15}{2} < k < -2$$

$$\xrightarrow{k\in Z} -7 \leq k \leq -3$$

بنابراین ۵ نقطه از نقاط بازه $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{7}\right)$ عضو دامنه f نیستند.

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | متوسط

مدت زمان لازم برای این‌که وزنه یک نوسان کامل انجام دهد برابر دوره‌ی تناوب آن است (چرا؟). دوره‌ی تناوب توابع $y = a\sin bx$ و $y = a\cos bx$، $b \neq 0$ به‌صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد. پس داریم: $d = -3/5\cos(2\pi t) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ثانیه

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

گزینه‌ی «۲»

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - f(x) = \frac{1}{\tan 3x} - \tan 3x = \cot 3x - \tan 3x$$

$\Rightarrow T = \frac{\pi}{6}$

نکته: $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ است، چون:

$$\cot\alpha - \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۶% — دشوار

در توابع متناوب با دوره تناوب T داریم:

$$f(x) = f(x + kT) \xrightarrow{T=2} f(x) = f(x + 2k); k \in Z$$

حال با قرارداد $k = 5$ خواهیم داشت:

$$f(-8/81) = f(-8/81 + 2 \times 5) = f(1/19) = \sqrt{2 - 1/19}$$
$$= 0/9$$

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۳% — ساده

گزینه «۴»

بیشترین مقدار تابع $y_{max} = |a| + 4$ و کمترین مقدار آن $y_{min} = -|a| + 4$ است. داریم:

$$y_{max} - y_{min} = 2|a| = 8 \Rightarrow |a| = 4$$

از طرفی دوره تناوب نیز از رابطه $T = \frac{2\pi}{|\pi a|} = \frac{2}{|a|}$ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow T = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۳۴% — ساده

گزینه «۱»

$$\sin^2(67/5^\circ) - \sin^2(22/5^\circ)$$

$$= \sin^2(90^\circ - 22/5^\circ) - \sin^2(22/5^\circ) = \cos^2(22/5^\circ)$$
$$- \sin^2(22/5^\circ)$$

می‌دانیم که: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\Rightarrow \cos^2(22/5^\circ) - \sin^2(22/5^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۹% — متوسط

گزینه «۱»

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \end{cases}$$

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = 5 \Rightarrow \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = 5 \Rightarrow \tan x = 5 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{5}$$

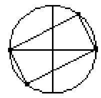
پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۲۷% — متوسط

گزینه «۴»

$\dots 2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin^2 x - 2\,si\dots$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - \cos x) = ۰ \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{۲} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & k \in Z \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۴} & k \in Z \\ ۰ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} & k \in Z \end{cases}$$



پس جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ بوده و بر روی دایره مثلثاتی یک مستطیل تشکیل می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۱۷% — متوسط

با استفاده از تانژانت، مجموع دو زاویه داریم:

$$\tan ۳\alpha = \tan[(۲\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)] = \frac{\tan(۲\alpha-\beta)+\tan(\alpha+\beta)}{۱-\tan(۲\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow \tan ۳\alpha = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}} + ۲ - \sqrt{۳}}{۱ - \frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳\alpha = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}; k \in Z$$

با جای‌گذاری مقدار $k = -۱$، جواب $\alpha = -\frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آید.

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۳% — دشوار

ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم، داریم:

$$(۱ + \cos x)(۱ - \cos x) = \sin x \cos \frac{x}{۲} \Rightarrow ۱ - \cos^۲ x = \sin x \cos \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = \sin x \cos \frac{x}{۲} \Rightarrow \sin x(\sin x - \cos \frac{x}{۲}) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \quad , \quad \sin x - \cos \frac{x}{۲} = ۰ \Rightarrow \sin x = \cos \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲}) \begin{cases} x = ۲k\pi + (\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲}) \Rightarrow x = \frac{۴k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲}) \Rightarrow x = ۴k\pi + \pi \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

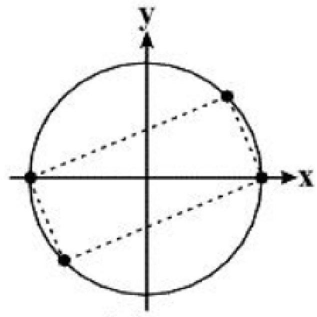
پاسخ: گزینه ۳ — گزینه های دام دار ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۵% — دشوار

گزینهٔ «۳»

$$\sin ۲x . \tan x - \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x(\tan x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \xrightarrow{\text{دربازهٔ } [۰,۲\pi)} ۰,\pi \\ \tan x = ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

پس چهار نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی در بازهٔ $[۰, ۲\pi)$ جواب‌های معادله می‌باشند. در نتیجه یک مستطیل ایجاد می‌شود:



مستطیل

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

گزینه «۱»

$$\cos ۵x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۵x = ۲k\pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۶% | دشوار

$$\tan(۲x+۱) = \frac{۱}{\tan(x-۱)} \Rightarrow \tan(۲x+۱) = \cot(x-۱)$$

$$\Rightarrow \tan(۲x+۱) = \tan(\frac{\pi}{۲} - x + ۱) \Rightarrow ۲x + ۱ = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x + ۱$$

$$\Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

می‌دانیم $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$، پس:

$$۲\sin^۲ x = ۴ + ۵\cos x \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) = ۴ + ۵\cos x$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۵\cos x + ۲ = ۰ \Rightarrow (۲\cos x + ۱)(\cos x + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad (k \in Z) \\ \cos x = -۲ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

$$a\tan ۵۰^\circ = \tan ۷۰^\circ - \tan ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow a\tan(۷۰^\circ - ۲۰^\circ) = \tan ۷۰^\circ - \tan ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a(\tan ۷۰^\circ - \tan ۲۰^\circ)}{۱ + \tan ۷۰^\circ \tan ۲۰^\circ} = \tan ۷۰^\circ - \tan ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱ + \tan ۷۰^\circ \tan ۲۰^\circ} = ۱ \Rightarrow a = ۱ + \tan ۷۰^\circ \underbrace{\tan ۲۰^\circ}_{\cot ۷۰^\circ} \Rightarrow a = ۲$$

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۳ - آموزشی**

ساده | درصد پاسخگویی %۴۵ | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱

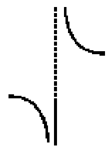
تابع f پیوسته و اکیداً نزولی بوده و $f(۳) = ۲$ است. حاصل $\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۶}{f(x)-۲}$ کدام است؟

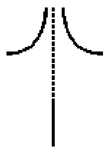
۱) $-\infty$ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

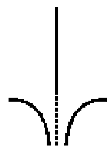
دشوار | قلم‌چی ۱۳۹۹

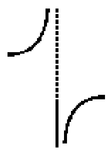
۲

تابع f (با دامنه R) اکیداً صعودی است به‌طوری که $f(۲) = ۰$ است. نمودار تابع $g(x) = \frac{۱}{-f(x-۲)}$ در همسایگی مجانب قائم‌اش کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

متوسط | درصد پاسخگویی %۱۶ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۳

۳

تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۹-x^۲}}{[x]+[-x]}$ دارای چند مجانب قائم است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

۱) بی‌شمار ۲) ۷
۳) ۵ ۴) مجانب قائم ندارد.

متوسط | درصد پاسخگویی %۲۸ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۳

۴

حاصل $\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} \frac{x-۱}{۱+\sqrt{۲}\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

متوسط | درصد پاسخگویی %۳۰ | قلم‌چی ۱۳۹۷

۵

اگر $f(x-۴) = \frac{x^۲-۳x-۴}{\sqrt{x}-۲}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۶

متوسط | درصد پاسخگویی %۲۷ | قلم‌چی ۱۳۹۶

۶

حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

دشوار | درصد پاسخگویی %۸ | قلم‌چی ۱۳۹۴

۷

تابع $f(x) = \frac{x^۲-۲}{x-۱} + \frac{x^۲+x}{x^۲-۱}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to a} f^{-۱}(x) = ۱$ باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۷% | ساده

⑧ به ازای کدام مجموعه مقادیر برای a، حاصل $\lim_{x\to 2} \frac{ax-4}{|x-2|}$ برابر $-\infty$ است؟

۱) $(-\infty, 2)$ ۲) $(-\infty, 2]$ ۳) $(2, +\infty)$ ۴) $[2, +\infty)$

قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

⑨ حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2+x\sin 2x}$ کدام است

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{2}{3}$

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۲% | متوسط

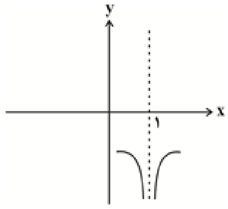
⑩ اگر $f(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{ax^n+2}$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$، آن‌گاه $\lim_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

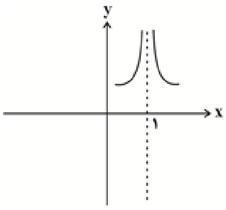
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$

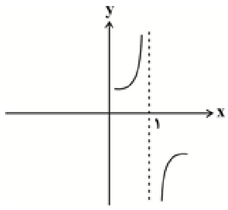
۳) 1 ۴) 2

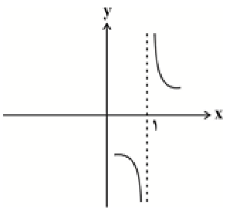
قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۸% | متوسط

⑪ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ در اطراف $x = 1$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

خارج از کشور ۱۴۰۰ | متوسط

⑫ مقدار $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1-x^2}}{x}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 1 ۳) صفر ۴) -1

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳% | دشوار

⑬ تابع $f(x) = \frac{ax^2+b}{3-\sqrt{x+6}}$ مفروض است. هرگاه $\lim_{x\to 3} f(x) = -36$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{3x\sqrt{x}}$ چقدر است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $+\infty$

قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

⑭ اگر $f(x) = \frac{3x^2-\sqrt{16x^4+x^2+1}}{ax^2+bx-3}$ باشد و داشته باشیم: $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$، حاصل $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{28}{3}$ ۳) $\frac{28}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۸% | متوسط

⑮ حد کسر $\frac{(x^2-1)^2-x^4+3x^2}{5x^2-3x}$ وقتی $x \to +\infty$ میل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$ ۴) 1

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۴% | قلم‌چی ۱۳۹۶ | گزینه های دام دار ۱

۱۶) حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-۲x}+۳}{۱-\sqrt{-x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

متوسط | درصد پاسخگویی ۳۰% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۱۷) حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{x}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

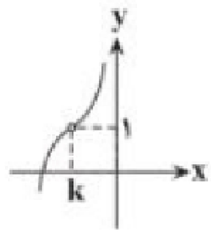
نسبتا دشوار | کنکور سراسری ۱۳۹۸

۱۸) اگر $f(x) = ۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، کدام است؟.

۱) ۱-
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) صفر

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۲

۱۹) اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to k^+} \frac{x}{۱-f(x)}$ کدام است؟



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) صفر
۴) $-k$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۲% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۲۰) حاصل $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^۲}{x-۱} - \frac{x^۲-x}{x+۱}\right)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۳-
۴) ۱-

ساده | درصد پاسخگویی ۴۵% | قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

حد چپ: $x < 3 \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) - 2 > 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-6}{f(x)-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

دشوار | قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

مجانب قائم نمودار تابع g خط $x = 4$ است، حال با توجه به اینکه تابع f اکیداً صعودی است، در $(-\infty,2]$ مقداری منفی و در $(2,+\infty)$ مقداری مثبت دارد، پس داریم:

$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{f(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{f(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۶% | قلم‌چی ۱۳۹۷ | گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} D_{f(x)} = (-3,3) - \{\pm 2, \pm 1, 0\} \\ \lim\limits_{x\to a\in R} [x] + [-x] = -1 \end{cases}$$

بنابراین این تابع فاقد مجانب قائم است.

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۸% | قلم‌چی ۱۳۹۸ | گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۱

در همسایگی راست $x = \frac{3\pi}{4}$، عبارت $x - 1$ مقداری مثبت به خود می‌گیرد و $\cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\sqrt{2}\cos x < -1 \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\cos x < 0$$

یعنی در این همسایگی، حد عبارت مخرج برابر صفر است و تابع $y = 1 + \sqrt{2}\cos x$ از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود:

$$\Rightarrow \lim_{x\to (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{x-1}{1+\sqrt{2}\cos x} = -\infty$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۳۰% | قلم‌چی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۳

به رابطه زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 4} f(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4} f(x-4) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+1)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(x+1)}{\sqrt{x}-2} = 20$$

متوسط | درصد پاسخگویی ۲۷% | قلم‌چی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۲

$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ (حد ابهام $\frac{0}{0}$ دارد)

عبارت‌های صورت و مخرج را در مزدوجشان ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{4-(5-x)} \times \frac{2+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$(-1) \times \frac{4}{2} = -2$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلمچی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۸٪ | دشوار

چون حد تابع f^{-1} در $x = a$ برابر ۱ است برای محاسبه‌ی a باید حد تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنیم. ابهام حد تابع f در $x = 1$، برابر $\infty - \infty$ است. مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2}{x-1} + \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2)(x+1)+x^2+x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2x-2+x^2+x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$ (ابهام $\frac{0}{0}$ دارد)

$$\Rightarrow \text{حد} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلمچی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۷٪ | ساده

گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to 2} \frac{ax-4}{|x-2|} = \frac{2a-4}{0^+}$$

صورت باید منفی شود: $2a - 4 < 0 \Rightarrow a < 2$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۹٪ | ساده

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2+x\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2(1+\frac{\sin 2x}{x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\lim_{x\to 0} 2(\frac{\sin 2x}{2x})} = 2 \times \frac{1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

ابتدا حد تابع را در $-\infty$ بررسی می‌کنیم. در صورت کسر عبارت $-\sqrt{x^2}$ و در مخرج کسر هم عبارت ax^n باقی‌می‌ماند، عبارت $-\sqrt{x^2}$ برابر با $-|x|$ است که در $-\infty$ عبارت $|x|$ را با $-x$ جایگزین می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{ax^n+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n}$$

$$= \lim_{n\to -\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-(-x)}{ax^n} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{ax^n}$$

جواب حد این تابع در $-\infty$ برابر با $-\frac{1}{2}$ شده است پس توان‌های صورت و مخرج باید برابر باشند که در نتیجه $n = 1$ به‌دست می‌آید. تقسیم ضرایب xهای صورت و مخرج کسر هم، جواب حد را می‌دهد، یعنی $-\frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ که مقدار a هم برابر با -2 می‌شود. با به‌دست آمدن a و n، تابع را بازنویسی می‌کنیم تا به فرم $f(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{-2x+2}$ تبدیل شود. حال حد این تابع را در نقطهٔ $x = 1$ تعیین می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{-2x+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{-2(x-1)} \times \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4-x^2-3}{-2(x-1)(2+\sqrt{x^2+3})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{-2(x-1)(2+\sqrt{x^2+3})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{-2(x-1)(2+\sqrt{x^2+3})} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | متوسط

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

پاسخ: گزینه ۴ | خارج از کشور ۱۴۰۰ | متوسط

گزینه «۴»

با توجه به اینکه $x \to -\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۴+x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۴}+\sqrt{x^۲}-x^۲}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^۲+|x|-x^۲}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -۱$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳٪ | دشوار

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \frac{۹a+b}{۳-\sqrt{۹}}$$

اگر $۹a+b \neq ۰$ باشد، مقدار حد نامتناهی خواهد شد، پس:

$$۹a+b=۰ \Rightarrow b=-۹a \Rightarrow f(x)=\frac{ax^۲-۹a}{۳-\sqrt{x+۶}}$$

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \lim_{x\to۳}\left(\frac{a(x^۲-۹)}{۳-\sqrt{x+۶}} \times \frac{۳+\sqrt{x+۶}}{۳+\sqrt{x+۶}}\right)$$

$$= \lim_{x\to۳} \frac{a(x-۳)(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})}{۹-(x+۶)} = \lim_{x\to۳} \frac{a(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})}{(-۱)}$$

$$\Rightarrow -a(۳+۳)(۳+\sqrt{۹}) = -۳۶ \Rightarrow a=۱ \xrightarrow{b=-۹} f(x) = \frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{۳x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲}{۳x\sqrt{x}(-\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲}{-۳x^۲} = -\frac{۱}{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۲۵٪ | متوسط

گزینهٔ «۱»

چون $\lim_{x\to۲} f(x) = +\infty$ پس $x=۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$\begin{cases} (x-۲)^۲ = x^۲-۴x+۴ \xrightarrow{\times(-۳)} -۳x^۲+۱۲x-۱۲ \\ ax^۲+bx-۳ \xrightarrow{\times۴} ۴ax^۲+۴bx-۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۳}{۴}, b=۳$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^۲-\sqrt{۱۶x^۴+x^۲+۱}}{-\frac{۳}{۴}x^۲+۳x-۳} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^۲-۴x^۲}{-\frac{۳}{۴}x^۲}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^۲}{-\frac{۳}{۴}x^۲} = \frac{۴}{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲۸٪ | متوسط

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴-۲x^۲+۱-x^۴+۳x^۲}{۵x^۲-۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+۱}{۵x^۲-۳x} = \frac{۱}{۵}$$

پاسخ: گزینه ۲ | گزینه های دام دارا ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴٪ | متوسط

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-۲x}+۳}{۱-\sqrt{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-۲x}}{-\sqrt{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{-۲x}{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{۲}) = -\sqrt{۲}$$

پا... | قلم‌چی ۱۳۹۵

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x}{\cos x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^-} = -\infty$$

تذکر: $x \to \frac{\pi}{2}^+ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos x < 0$

پاسخ: گزینه ۳ — کنکور سراسری ۱۳۹۸ — نسبتا دشوار

گزینهٔ «۳»

$$\sqrt{4x^2+x} = \sqrt{4(x^2+\frac{x}{4})} = 2\sqrt{(x+\frac{1}{8})^2 - \frac{1}{64}}$$

عدد $\frac{-1}{64}$ در $\pm\infty$ در کنار $(x+\frac{1}{8})^2$ ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود:

$$\lim_{x\to\infty} 2x + \sqrt{4x^2+x} = \lim_{x\to\infty} 2x + 2\sqrt{(x+\frac{1}{8})^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + 2\left|x+\frac{1}{8}\right| = 2x - 2x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

تذکر: در $x \to -\infty$ داخل قدرمطلق منفی است.

پاسخ: گزینه ۱ — گزینه های دام دار ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۷ — درصد پاسخگویی ۱۵٪ — متوسط

گزینهٔ «۱»

با توجه به نمودار، $k<0$ است، از طرفی وقتی $x \to k^+$، آن‌گاه $f(x) \to 1^+$ بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+} \frac{x}{1-f(x)} = \frac{k}{0^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۲۲٪ — متوسط

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x+1)-(x-1)(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-x^3+x^2+x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x}{x^2-1} = 3$$

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

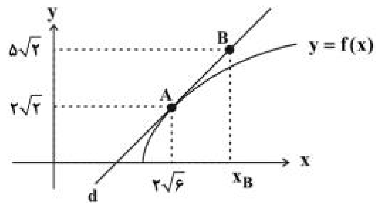
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۴ - آموزشی**

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۰٪ | ساده

①

در شکل زیر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(۲\sqrt{۶}) = \sqrt{۳}$ باشد، طول نقطه B کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۶}+۱$
۲) $۴\sqrt{۶}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۲\sqrt{۶}+۲$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶۲٪ | ساده

②

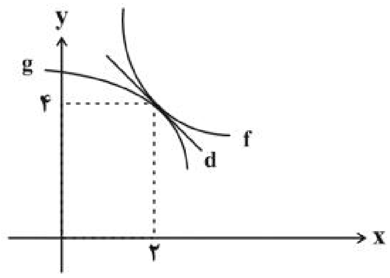
به ازای کدام مقدار k مشتق تابع $f(x) = x^۳ - kx$ در $x = ۱$ برابر صفر است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲-

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۰٪ | متوسط

③

خط d در نقطه $x = ۲$ بر نمودار تابع‌های f و g مماس است. اگر $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۲+h)-۴}{۲h} = -۳$ باشد، حاصل $\lim_{h \to ۰} \frac{g(۲-h)-۴}{۳h}$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۶-

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۷٪ | ساده

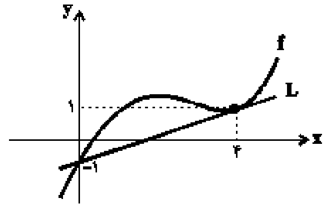
④

اگر نیمساز ناحیه اول مختصات بر نمودار تابع f در نقطه $x = ۱$ مماس باشد، حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{f\left(۱+\frac{x}{۲}\right)-۱}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

۵) مطابق شکل، خط L در نقطه $x = ۴$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{x-۴f(x)}{۱-(f(x))^{۲}}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۱}{۲}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۸% | ساده

۶) اگر $f'(۴) = ۳$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{g(x+۱)-۴}{x-۱}$ درصورت وجود کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱% | دشوار

۷) تابع $f(x) = x^{۳} + \sqrt[۳]{x}$ مفروض است. از نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر تابع وارون $f(x)$، خط مماسی رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۳
۳) ۰/۴
۴) ۰/۶

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

۸) خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{x+۴}$ در نقطه $x = ۰$، از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۲)$ ۲) $(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},-۱)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},-۱)$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

۹) نمودار تابع $f(x) = ۲x^{۳} + Kx + \frac{۱}{۲}$ بر محور xها مماس است. مقدار K کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۵ ۳) -۰/۷۵ ۴) -۱/۵

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۴% | ساده

۱۰) در تابع درجه دوم f داریم: $f'(۱) = ۲$ و $f''(۳) = ۴$. مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲% | دشوار

۱۱) اگر $f(\sin x) = \cos ۲x$ باشد، آن‌گاه $f'(\cos x)$ کدام است؟ ($f'(\cos x)$ تعریف شده است.)

۱) $۴\sin x$
۲) $-۴\sin x$
۳) $۴\cos x$
۴) $-۴\cos x$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۵٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴

(۱۲)

اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $f(\frac{x+1}{x-1}) = x^2$ باشد، آنگاه $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

ساده | درصد پاسخگویی ۵۹٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

(۱۳)

تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b; x \le 1 \\ \frac{1}{x}; x > 1 \end{cases}$ مفروض است. اگر حاصل $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ موجود باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{3}{4}$

متوسط | خارج از کشور ۱۳۹۸

(۱۴)

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0, 8]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۱/۵- ۳) ۱- ۴) ۰/۵-

ساده | درصد پاسخگویی ۴۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

(۱۵)

مشتق تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۵

(۱۶)

دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 5x - a|x-1|$ و $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$ مفروضند. تابع fog به‌ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول ۱ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$

۳) ۵ ۴) هیچ مقداره

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۲

(۱۷)

در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است. h کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

دشوار | درصد پاسخگویی ۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹

(۱۸)

فاصله نقاط روی نمودار تابع $2y - \sin 2\pi x = 1$ از مبدأ مختصات را d می‌نامیم. آهنگ لحظه‌ای تغییر d در نقطه‌ای به طول $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{17}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{17}}$

۳) $\frac{1}{2\sqrt{17}}$ ۴) $\frac{3}{2\sqrt{17}}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۵٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

(۱۹)

اگر آهنگ متوسط تغییر $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}}$ در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای f در $x = \frac{\pi}{2}$ باشد، k کدام است؟ $\frac{k\sqrt{2}}{\pi}$

۱) $-4\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

دشوار | درصد پاسخگویی ۹٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | گزینه های دام دار ۱

(۲۰)

اگر $f(x) = 2x + \sin x$ باشد، آهنگ آنی تغییر شیب خط مماس بر $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۱-

کنکور سراسری ۱۳۹۸ | متوسط

(۲۱)
در تابع با ضابطه $f(x)=(x+2)\sqrt{4x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0,2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲۰
۴) ۰/۲۵

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۴۶% | ساده

(۲۲)
آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ در بازهٔ $[4,9]$ با آهنگ لحظه‌ای این تابع در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟

۱) $\frac{25}{4}$
۲) $\frac{1}{16}$
۳) $\frac{1}{9}$
۴) $\frac{36}{9}$

قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

(۲۳)
در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[1,4]$، کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۷۵

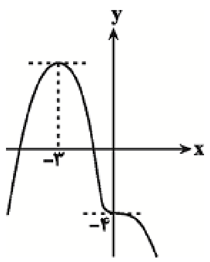
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۵% | ساده

(۲۴)
آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=2x^2-7x+1$ در نقطه‌ای با کدام طول، با آهنگ متوسط تغییر آن در بازه $[-3,5]$ برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۱

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۶% | متوسط

(۲۵)
شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2c$ است. $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۳
۲) -۱
۳) ۱
۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۰% | ساده

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m_{AB} =$ شیب خط مماس در نقطه $A = \sqrt{3} = f'(2\sqrt{6})$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{x_B - 2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{x_B - 2\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x_B - 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}x_B = 9\sqrt{2} \Rightarrow x_B = 3\sqrt{6}$$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۶۲% | ساده

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^3-kx-(1-k)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-kx+k-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1-k)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1-k)$$

$$= 3 - k = 0 \Rightarrow k = 3$$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۰% | متوسط

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-4}{2h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{1}{2}f'(2) = -3$$

$$\Rightarrow f'(2) = -6$$

چون خط d در نقطه $x = 2$ بر نمودار توابع f و g مماس است، $g'(2) = f'(2) = -6$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(2-h)-4}{3h} = -\frac{1}{3}\lim_{h\to 0} \frac{g(2-h)-g(2)}{-h}$$

$$= -\frac{1}{3}g'(2) = \left(-\frac{1}{3}\right)(-6) = 2$$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۳۷% | ساده

خط $y = x$ در نقطه $x = 1$ بر نمودار تابع f مماس می‌باشد، بنابراین داریم:

$(1,1) \in f(x)\ ,\ f'(1) = 1$

با فرض $t = \frac{x}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\left(1+\frac{x}{2}\right)-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t)-f(1)}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{f(1+t)-f(1)}{t}$$

$$= \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹ | دشوار

گزینه «۱»

شیب خط L همان $f'(4)$ است. داریم:

$$m_L = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4f(x)}{1-(f(x))^2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4+4-4f(x)}{(1+f(x))(1-f(x))}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{1+f(x)} \times \lim_{x\to 4} \left[\frac{x-4}{1-f(x)} + \frac{4(1-f(x))}{1-f(x)}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{f'(4)} + 4\right] = \frac{1}{2}(-2+4) = 1$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۸% | ساده

گزینهٔ «۳»

چون $(fog)'(۲) = ۶$ است، پس حتماً g در $x = ۲$ پیوسته است.

$$(fog)'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) = ۶$$

چون $\lim_{x\to ۱} \frac{g(x+۱)-۴}{x-۱}$ در صورت وجود یک عدد حقیقی است، پس $\lim_{x\to ۱} g(x+۱) = ۴$ است. $\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x) = ۴ = g(۲)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{g(x+۱)-g(۲)}{x-۱} = g'(۲)$$

$$\Rightarrow g'(۲)\underbrace{f'(۴)}_{۳} = ۶ \Rightarrow g'(۲) = ۲$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱% | دشوار

نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر نمودار تابع وارون است. یعنی طول نقطه متناظر آن روی تابع اصلی برابر ۱ است. بنابراین $f(۱) = ۲$. پس نقطه‌ی $(۱, ۲)$ روی تابع اصلی و نقطه‌ی $(۲, ۱)$ روی تابع وارون قرار دارد، پس $(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)}$ از طرف داریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f'(۱) = ۳ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۳}{۱۰}$$

معادله‌ی خط مماس : $y - ۱ = \frac{۳}{۱۰}(x-۲) \xrightarrow{x=۰} y - ۱ = \frac{۳}{۱۰}(-۲)$

$$\Rightarrow y = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۲۷% | متوسط

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = ۰$ برابر $f'(۰)$ است. پس داریم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x\sqrt{x+۴}-۰}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x+۴} = ۲$$

از طرف دیگر خط مماس از نقطه $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $y = ۲x$ است و این خط از نقطه $(-\frac{۱}{۲}, -۱)$ نیز می‌گذرد.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۲۰% | متوسط

در نقطه‌ای به طول x که منحنی بر محورx ها مماس است، داریم:

$$f'(x) = f(x) = ۰$$

$$f'(x) = ۶x^۲ + K = ۰ \Rightarrow K = -۶x^۲ (*)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله } f(x)=0} ۲x^۳ - ۶x^۳ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow -۴x^۳ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} K = -۶x^۲ = -۶\left(\frac{۱}{۴}\right) = -\frac{۳}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۴۴% | ساده

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲ax + b , \ f''(x) = ۲a$$

$$f''(۳) = ۴ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$۲a + b = ۲ \xrightarrow{a=۲} b = -۲$$

$\Rightarrow f'(x) = 4x - 2$

$\Rightarrow f'(2) = 4(2) - 2 = 6$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۲% | دشوار

$x \to \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) = \cos 2(\frac{\pi}{2} - t)$

$f(\cos t) = -\cos 2t \xrightarrow[\text{میگیریم}]{\text{از طرفین مشتق}}$

$(-\sin t)f'(\cos t) = 2\sin 2t \Rightarrow f'(\cos t) = \frac{2\sin 2t}{-\sin t}$

$\Rightarrow f'(\cos x) = \frac{2\sin 2x}{-\sin x} = \frac{2\times 2\sin x\cos x}{-\sin x} = -4\cos x$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۳۵% | ساده

گزینه‌ی «۴»

$\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Rightarrow x = 2$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^2 \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{با مشتق‌گیری از}} -\frac{2}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x$

$\xrightarrow{x=2} -2f'(3) = 4 \Rightarrow f'(3) = -2$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵۹% | ساده

حد داده‌شده همان تعریف مشتق در $x = 1$ است، بنابراین $f'(1)$ موجود است.

$$\begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} a + b = 1 \qquad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax; x \le 1 \\ -\frac{1}{x^2}; x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_-(1) = 2a \\ f'_+(1) = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط مشتق پذیری}} f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(1)} b = \frac{3}{2} \Rightarrow ab = -\frac{3}{4}$$

پاسخ: گزینه ۳

خارج از کشور ۱۳۹۸ | متوسط

گزینه ۳

ابتدا نقاط ابتدا و انتهای تابع را می‌یابیم و سپس شیب خط واصل آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

نقطهٔ ابتدایی: $f(0) = -5 \Rightarrow (0,-5)$

نقطهٔ انتهایی: $f(8) = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow (8,3)$

شیب خط: $m = \frac{3-(-5)}{8-0} = 1$

چون خط مماس و خط واصل ابتدا و انتهای نمودار موازی‌اند پس باید شیب برابر داشته باشند. پس نقطه‌ای از منحنی را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر آن برابر ۱ باشد.

$f'(x) = \frac{4-(-5)}{\ldots} = \frac{9}{\ldots} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$

$|x+1| = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 & \text{ق ق} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 & \text{(غ ق ق. عضو دامنه نیست)} \end{cases}$$

حال باید معادلهٔ خط مماس بر تابع در $x = 2$ را بیابیم. $f(2) = \frac{3}{3} = 1$

با نقطهٔ $(2,1)$ و شیب $m = 1$ معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

$$\Rightarrow y - 1 = 1(x-2) \Rightarrow y = x - 1$$

پس عرض از مبدأ خط مماس -1 می‌باشد.

پاسخ: گزینه ۲ — ساده | درصد پاسخگویی ۴۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۳ — دشوار | درصد پاسخگویی ۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۵

تابع fog عبارت است از:

$$f(g(x)) = 5(2x + |x^2 - 1|) - a|2x + |x^2 - 1| - 1|$$

در همسایگی نقطه‌ی $x = 1$ عبارت $2x + |x^2 - 1| - 1$ مثبت است، لذا:

$$|2x + |x^2 - 1| - 1| = 2x + |x^2 - 1| - 1$$

پس:

$$fog = 10x + 5|x^2 - 1| - a(2x - 1 + |x^2 - 1|)$$

برای مشتق‌پذیری این تابع در $x = 1$ لازم و کافی است که $5|x^2 - 1| - a|x^2 - 1|$ یا $(5 - a)|x^2 - 1|$ مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:

$$5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$$

پاسخ: گزینه ۳ — متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۲

گزینهٔ «۳»

$\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} =$ آهنگ متوسط تغییر تابع از ۲ تا $2+h$

$$= \frac{(2+h+\frac{1}{2+h})-(2+\frac{1}{2})}{h} = \frac{8}{9}$$

$$\xRightarrow{h\neq 0} 2+h+\frac{1}{2+h} - \frac{5}{2} = \frac{8}{9}h \Rightarrow h + \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{8}{9}h$$

$$\Rightarrow 9h + \frac{9}{2+h} - \frac{9}{2} = 8h \Rightarrow h + \frac{9}{2+h} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2+2h+9}{2+h} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2h^2 - 5h = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = 2/5 \\ h = 0 \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۱ — دشوار | درصد پاسخگویی ۶٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه ی «۱»

$$y = \frac{1+\sin 2\pi x}{2} \Rightarrow y\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

فاصله نقاط روی نمودار این تابع از مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{(1+\sin 2\pi x)^2}{4}}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر نیز همان مشتق است، پس داریم:

$$d'(x) = \frac{2x + \frac{2(2\pi \cos 2\pi x)(1+\sin 2\pi x)}{4}}{2d(x)}$$

با جای‌گذاری $x = \frac{1}{4}$ داریم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = d'(\tfrac{1}{4}) = \frac{2(\frac{1}{4})+0}{2\sqrt{(\frac{1}{4})^2+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{17}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

پاسخ: گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۵% | دشوار

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(\pi)-f(\frac{\pi}{2})}{\pi-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\cot\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\cot\frac{\pi}{4}}}{\pi-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2})}{2\sqrt{\cot\frac{x}{2}}} \Rightarrow f'(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}(1+(1)^2)}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\pi} = \frac{k\sqrt{2}}{\pi} \times \frac{-1}{2} \Rightarrow k = 2\sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه های دام دار ۱ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۹% | دشوار

دقت بفرمائید که شیب خط مماس بر $y = f(x)$ در نقطه (x,y) برابر $f'(x)$ است. لذا مسئله آهنگ آنی تغییر $f'(x)$ را می‌خواهد، یعنی f''.

$$f''(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin\tfrac{\pi}{2} = -1$$

پاسخ: گزینه ۴

کنکور سراسری ۱۳۹۸ | متوسط

گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط در بازه } [0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4\times3-2}{2} = 5$$

$$x = \tfrac{3}{4} \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(\tfrac{3}{4})$$

به کمک رابطه $(f(x)g(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$، مشتق تابع f را می‌یابیم:

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{2(x+2)}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(\tfrac{3}{4}) = 2 + \tfrac{11}{4} = 4/75$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = 0/25$$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۴۶% | ساده

گزینهٔ «۱»

مقدار آهنگ تغییر متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(9)-f(4)}{9-4} = \frac{12-6}{5} = \frac{6}{5}$$

از طرفی آهنگ تغییر لحظه‌ای در یک نقطه مانند a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{25}{4}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۹% | ساده

گزینهٔ «۲»

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر با مشتق تابع در آن نقطه است، بنابراین:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - (\frac{-1}{x^2}) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه‌ی $[1, 4]$ برابر است با:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{\frac{1}{2}\times 4^2 - \frac{1}{4} - (\frac{1}{2}-1)}{3} = \frac{8-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{33}{4}}{3} = \frac{11}{4}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای و آهنگ تغییر متوسط برابر است با:

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0/5$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۵۵% | ساده

گزینه ی «۴»

آهنگ متوسط تغییر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ در بازه $[x_1, x_2]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در نقطه $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ برابر است.

پس در این سؤال نقطه موردنظر $x = \frac{-3+5}{2} = 1$ است.

پاسخ: گزینه ۴ | قلمچی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۶% | متوسط

تابع در نقطهٔ $x = -3$، ماکزیمم دارد. پس باید داشته باشیم:

$f'(-3) = 0$

$f'(x) = -x^3 + 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(-3) = 0$

$\Rightarrow -(-3)^3 + 3a(-3)^2 + 2b(-3) = 0$

$\Rightarrow +27 + 27a - 6b = 0 \Rightarrow 9a - 2b = -9$

$x = 0$ طول نقطهٔ عطف تابع است:

$f''(0) = 0 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6ax + 2b \Rightarrow -3(0)^2 + 6a(0)$
$+ 2b = 0$

$\Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$(0, -4) \in f \Rightarrow f(0) = -4 \Rightarrow 2c = -4 \Rightarrow c = -2$

$9a - 2b = -9 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$

$a + b + c = -1 + 0 + (-2) = -3$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حسابان ۲ - فصل ۵ - آموزشی**

آکادمی کوچینگ
تحصیلی منصور رخشان

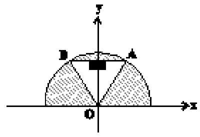
قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۳۱% | متوسط

۱) حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 3$ دو اکسترمم نسبی داشته باشد؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $R-[-1,1]$ ۴) R

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۵% | متوسط

۲) مثلث OAB مطابق شکل، زیر نمودار $y = \sqrt{2-x^2}$ محاط شده‌است، به گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی نمودار قرار دارند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کم‌ترین مقدار ممکن باشد، اندازه میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۷% | دشوار

۳) در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانه‌ی قائم با حجم π، با کدام ارتفاع کمترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

سراسری ۱۴۰۱ | دشوار

۴) محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۴% | دشوار

۵) ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ چقدر از می‌نیمم مطلق آن بیش‌تر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$
۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

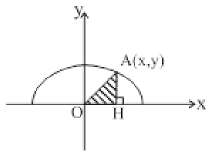
قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۱۴% | متوسط

۶) نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $y = x - 3x^{\frac{1}{3}}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم
۳) سوم ۴) چهارم

دشوار | درصد پاسخگویی ۴٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

۷) در شکل زیر، اگر نقطه $A(x,y)$ واقع بر نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، حداکثر مساحت مثلث قائم الزاویه OAH کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | قلم‌چی ۱۳۹۵

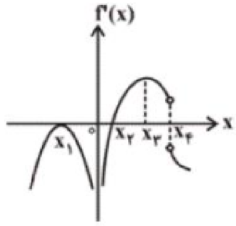
۸) اگر خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=x^۴-۲x^۲+۲$ را در چهار نقطه قطع کند، حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۰$ ۲) $۰<k<۱$

۳) $۱<k<۲$ ۴) $۲<k<۳$

دشوار | درصد پاسخگویی ۹٪ | قلم‌چی ۱۳۹۴ | گزینه های دام دار ۲

۹) اگر تابع $f(x)$ در R پیوسته باشد و نمودار $f'(x)$ به صورت مقابل باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد تابع $y=f(x)$ صحیح است؟



۱) سه عطف و دو اکسترمم

۲) دو عطف و دو اکسترمم

۳) یک عطف و سه اکسترمم

۴) سه عطف و یک اکسترمم

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۸٪ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | گزینه های دام دار ۳

۱۰) اگر $f(x)=x^۳-\sin ۲x$ باشد، تابع f' چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

دشوار | درصد پاسخگویی ۵٪ | قلم‌چی ۱۴۰۰

۱۱) اگر $(\sqrt[۳]{a},۲)$ نقطه عطف تابع $y=\frac{b}{x^۳-۱}$ باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) -۳ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | قلم‌چی ۱۳۹۸

۱۲) از نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۴$ خط مماسی بر آن رسم می‌کنیم، به‌طوری که این خط در نقطه تماس از نمودار عبور می‌کند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

ساده | درصد پاسخگویی ۳۷% | قلم‌چی ۱۳۹۵

۱۳) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالا است؟

۱) $-1 < a < 1$
۲) $-1 < a < 2$
۳) $-2 < a < 1$
۴) $-2 < a < 2$

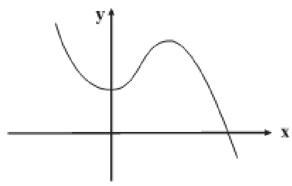
متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلم‌چی ۱۳۹۹

۱۴) جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = \frac{1-8\sqrt{x}}{x}$ روی بازه $(0, a)$ رو به بالا است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{16}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{9}$

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۹% | قلم‌چی ۱۳۹۷

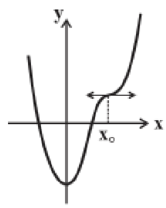
۱۵) اگر f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و نمودار f' شبیه به نمودار مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) f فاقد اکسترمم - f' دو اکسترمم منفی دارد.
۲) f یک ماکزیمم نسبی و دو نقطه عطف دارد.
۳) f دو اکسترمم و f' دو اکسترمم دارد.
۴) f دو نقطه عطف دارد و f' فاقد اکسترمم است.

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۵% | قلم‌چی ۱۳۹۸

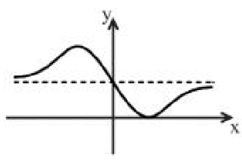
۱۶) شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + ax^2 + b$ را نمایش می‌دهد. مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۸

متوسط | درصد پاسخگویی ۱۳% | قلم‌چی ۱۳۹۶

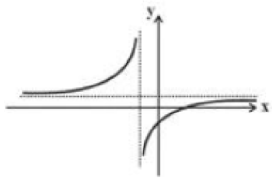
۱۷) شکل زیر نمایش تابعی با ضابطه‌ی $y = \frac{x^2+ax+b}{2x^2+x+1}$ است. مقدار a کدام است؟



۱) ۲
۲) $\sqrt{2}$
۳) $-\sqrt{2}$
۴) -2

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۳٪ | متوسط

(۱۸) نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax-b-2}{x^2+bx+4}$ به‌صورت شکل مقابل است. مقدار $a-b$ کدام است؟



۱) ۵
۲) -۵
۳) -۱۱
۴) ۱۱

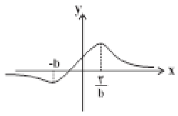
قلم‌چی ۱۳۹۶ | درصد پاسخگویی ۱۴٪ | متوسط

(۱۹) تابع با ضابطه‌ی $y=ax+b+\frac{x^2}{2x-1}$ تابع هموگرافیکی است که محورهای را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{2}$

قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

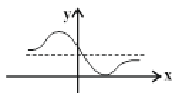
(۲۰) اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2+a}$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۶
۳) ۲
۴) -۶

قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | متوسط

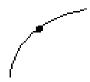
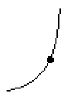
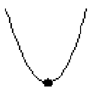
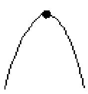
(۲۱) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax^2-2x+2}{x^2+b}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به‌کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟



۱) $(1,3)$
۲) $(1,5)$
۳) $(\frac{1}{2},3)$
۴) $(\frac{1}{2},5)$

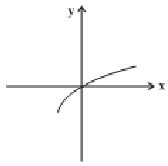
قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | ساده

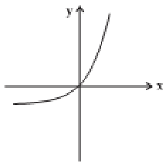
(۲۲) نمودار تابع $f(x)=x^5-6x^3-2x^2$ در همسایگی نقطه $x=2$ به کدام صورت است؟

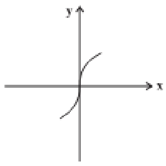
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

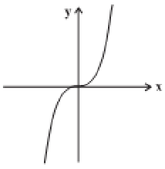
قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۵% | متوسط

۲۳) نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱) 

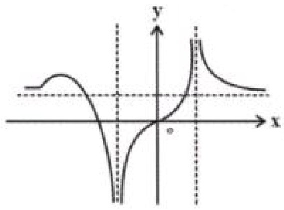
۲) 

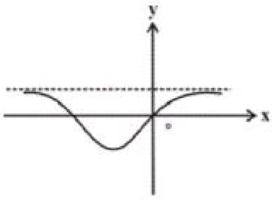
۳) 

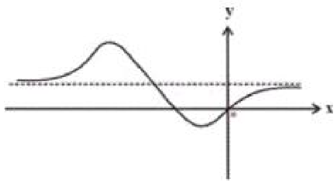
۴) 

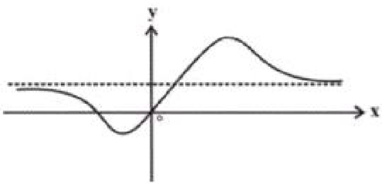
قلم‌چی ۱۳۹۴ | درصد پاسخگویی ۲۱% | متوسط

۲۴) نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x+1}$ به صورت کدام یک از شکل‌های زیر است؟

۱) 

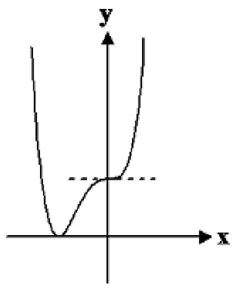
۲) 

۳) 

۴) 

قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۲۳% | متوسط

۲۵) اگر نمودار تابع $f(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + b$ به صورت زیر باشد، مقدار b کدام است؟



۱) ۲۵

۲) ۲۷

۳) ۴۶

۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۳ — قلم‌چی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۳۱% — متوسط

گزینه «۳»

$f'(x) = x^۲ + ۲ax + ۱$

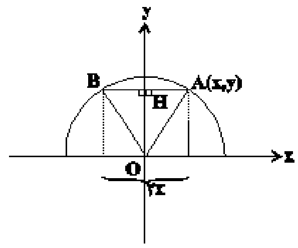
معادله $f'(x) = ۰$ باید دو جواب حقیقی داشته باشد، بنابراین کافی است Δی عبارت درجه دوم بزرگ‌تر از صفر باشد.

$\Delta = (۲a)^۲ - ۴(۱)(۱) = ۴a^۲ - ۴ > ۰ \Rightarrow a^۲ > ۱$

$\Rightarrow a > ۱$ یا $a < -۱ \Rightarrow a \in R - [-۱,۱]$

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۸ — درصد پاسخگویی ۱۵% — متوسط

با توجه به ثابت‌بودن کل مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها، برای آن که مساحت قسمت هاشورخورده، کم‌ترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB بیش‌ترین مقدار باشد.



اگر مختصات رأس A از مثلث را (x,y) در نظر بگیریم، قاعده مثلث (AB) برابر ۲x و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با:

$S = \frac{۱}{۲}(AB)(OH) = \frac{۱}{۲}(۲x)(y) = xy$

$\Rightarrow S(x) = x\sqrt{۲ - x^۲}$

$\Rightarrow S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱\times\sqrt{۲ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۲-x^۲}} \times x = ۰$

$\Rightarrow \frac{(۲-x^۲)-x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰$

$\Rightarrow x = \pm۱ \xrightarrow[\text{مختصاتاست}]{\text{A در ربع اول}} x = ۱$

$\Rightarrow OH = y = \sqrt{۲ - x^۲} \xrightarrow{x=۱} y = ۱$

حال از آن جا که در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، مقدار میانه نیز برابر ۱ خواهدبود.

پاسخ: گزینه ۱ — قلم‌چی ۱۳۹۶ — درصد پاسخگویی ۷% — دشوار

حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^۲ h$. پس:

$\pi = \pi r^۲ h \Rightarrow r^۲ h = ۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{r^۲}$

اگر مساحت لیوان کم‌ترین شود، مقدار فلز به‌کار رفته در ساخت آن کم‌ترین می‌شود. چون لیوان استوانه‌ای در باز است، پس مساحت آن برابر است با:

$S = \pi r^۲ + ۲\pi rh = \pi r^۲ + ۲\pi r\frac{۱}{r^۲} = \pi r^۲ + \frac{۲\pi}{r}$

مقدار h برای کمترین مقدار S را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم.

$S' = \pi(۲r - \frac{۲}{r^۲}) = \frac{۲\pi(r^۳-۱)}{r^۲} = ۰ \Rightarrow r = ۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{۱^۲} = ۱$

پاسخ: گزینه ۴ سراسری ۱۴۰۱ دشوار

گزینه «۴»

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+۳}{(a+۱)x+a-۱} = \underbrace{\frac{a}{a+۱}}_{\text{مجانب افقی}} \quad , \quad (a+۱)x+a$$

$$-۱ = ۰ \to x = \underbrace{\frac{۱-a}{a+۱}}_{\text{مجانب قائم}}$$

$$\underbrace{w\left(\frac{۱-a}{a+۱}, \frac{a}{a+۱}\right)}_{\text{محل تلاقی مجانبها}},$$

$$f'(x) = ۳x+۱ \to f'\left(\frac{۱-a}{a+۱}\right) = ۳\left(\frac{۱-a}{a+۱}\right)+۱ = ۰ \to a = ۲$$

$$f(x) = \frac{۲x+۳}{۳x+۱} \xrightarrow{y=۰} ۲x+۳ = ۰ \to x = \frac{-۳}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۳ قلم‌چی ۱۳۹۵ درصد پاسخگویی ۴% دشوار

کافی است، اکسترمم مطلق تابع داده شده را در یک دوره‌ی تناوب، مثلاً در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ به دست آوریم.

$$f(x) = ۲\sin x - \sin ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲\cos x - ۲\cos ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \\ ۲x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۰, ۲\pi, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} f(۰) = f(۲\pi) = ۰ \\ f\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} : \text{ماکزیمم مطلق} \\ f\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) = -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} : \text{می‌نیمم مطلق} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ اختلاف ماکزیمم و می‌نیمم مطلق $= ۳\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ قلم‌چی ۱۳۹۴ درصد پاسخگویی ۱۴% متوسط

$$y = x - ۳x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y' = ۱ - x^{-\frac{۲}{۳}} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{x^۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ \sqrt[۳]{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	ت ن	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲ max	↘	۰	↘	-۲ min	↗	$+\infty$

نقطه‌ی $(۱, -۲)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع فوق است که در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

پاسخ: گزینه ۴ قلم‌چی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۴% دشوار

$$S_{\overset{\Delta}{OAH}} = \frac{۱}{۲}xy \xrightarrow{y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}} S(x) = \frac{۱}{۳}x\sqrt{۱-x^۲}$$

روش اول:

$$S'(x) = \frac{۱}{۳}\sqrt{۱-x^۲} - \frac{x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱-۲x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}}$$

بیشترین مساحت مثلث، در نقطه بحرانی تابع S(x) رخ می‌دهد.

$$\ldots^۲ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{6}$

روش دوم: ماکزیمم مقدار S(x)، زمانی رخ می‌دهد که برابری $x = \sqrt{1-x^2}$ برقرار باشد. $\xrightarrow{x>0} x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۳۹۵ — درصد پاسخگویی ۱۵% — متوسط

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 \Rightarrow f(0) = 2, f(\pm 1) = 1$

تابع f سه اکسترمم نسبی دارد و با توجه به اینکه وقتی $x \to \pm\infty$، همواره $y \to +\infty$، پس شکل تابع به‌صورت  می‌شود.

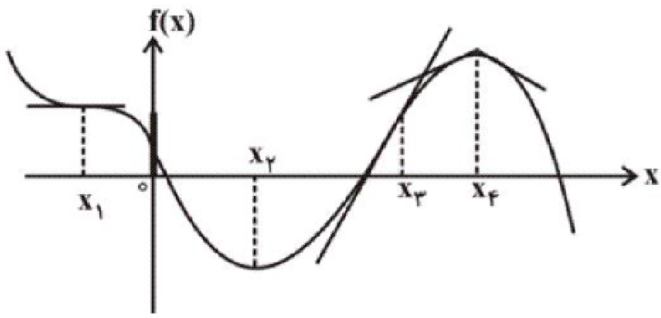
با توجه به شکل، برای اینکه $y = k$ نمودار را در چهار نقطه قطع کند، باید $f(\pm 1) < k < f(0)$ باشد. یعنی $1 < k < 2$.

پاسخ: گزینه ۱ — گزینه های دام دار ۲ — قلمچی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۹% — دشوار

نمودار $f'(x)$ در x_1 و x_3 اکسترمم نسبی دارد، پس $f(x)$ در این دو نقطه عطف دارد. همچنین $f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty$ است، پس $f(x)$ در $x = 0$ عطف قائم دارد.
همچنین طبق جدول آزمون مشتق اول $f(x)$ در x_2 و x_4 دارای اکسترمم نسبی است.

x	x_4	
f′	+	ت.ن	−
f	↗	max نسبی	↘

x	x_2	
f′	−	۰	+
f	↘	min نسبی	↗



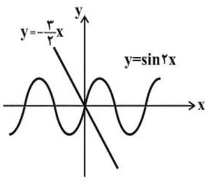
پاسخ: گزینه ۲ — گزینه های دام دار ۳ — قلمچی ۱۳۹۹ — درصد پاسخگویی ۱۸% — متوسط

گزینه «۲»

$f'(x) = 3x^2 - 2\cos 2x$

برای به‌دست آوردن نقاط بحرانی f'، به f'' نیاز داریم:

$f''(x) = 6x + 4\sin 2x \xrightarrow{f''(x)=0} \sin 2x = -\frac{6}{4}x = -\frac{3}{2}x$



نمودار دو تابع $y = \sin 2x$ و $y = -\frac{3}{2}x$ فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (در $x = 0$)، پس معادله $f''(x) = 0$ فقط یک جواب دارد و با توجه به اینکه f'' در همسایگی آن تغییر علامت می دهد، $x = 0$ تنها نقطه بحرانی تابع f' است.

پاسخ: گزینه ۳ — قلمچی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۵% — دشوار

گزینهٔ «۳»

در ابتدا، مختصات نقطه داده شده باید در ضابطه تابع صدق کند:

$$\Rightarrow 2=\frac{b}{a-1}\Rightarrow b=2(a-1)(*)$$

حال مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم که $x=\sqrt[3]{a}$ ریشه آن باشد:

$$y'=-3b\frac{x^2}{(x^3-1)^2}\Rightarrow y''=6b\frac{x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$$

$$\xrightarrow{y''=0}\begin{cases}\sqrt[3]{a}=0\Rightarrow a=0\rightarrow b\overset{(*)}{=}-2\\ 2(\sqrt[3]{a})^3+1=2a+1=0\Rightarrow -\frac{1}{2}\xrightarrow{(*)}b=-3\end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۳۲% | ساده

می‌دانیم در نقطه عطف، خط مماس از نمودار عبور می‌کند. داریم:

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$
$$\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f''(x)=6x-6$$

$f''(x)=0\Rightarrow$ طول نقطه عطف $=1$

$\Rightarrow$ نقطه عطف $=(1,f(1))=(1,2)$

فاصله نقطه $(1,2)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$ است.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۳۷% | ساده

$$y'=4x^3+3ax^2+3x\Rightarrow y''=12x^2+6ax+3>0$$

$$\xrightarrow{\div 3}4x^2+2ax+1>0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta'<0\Rightarrow\Delta'=a^2-4<0\Rightarrow a^2<4\Rightarrow -2<a<2\\ 4>0\end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۹ | درصد پاسخگویی ۱۳% | متوسط

گزینه «۴»

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x}-1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2-6\sqrt{x}}{x^3}$$

برای اینکه جهت تقعر تابع رو به بالا باشد، لازم است $f''(x)>0$ باشد. داریم:

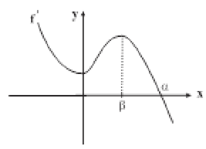
$$\frac{2-6\sqrt{x}}{x^3}>0\xrightarrow{D_{f'}=D_{f''}=(0,+\infty)}2-6\sqrt{x}>0\Rightarrow\sqrt{x}<\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x<\frac{1}{9}\xrightarrow{x>0}x\in\left(0,\frac{1}{9}\right)$$

بنابراین بیشترین مقدار a، $\frac{1}{9}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۱۹% | متوسط

اگر نقطه برخورد f' با محور xها، α باشد.



x	α

پس $x = \alpha$ نقطه ماکزیمم نسبی $f(x)$ است.

f' در فاصله $(-\infty,۰)$ نزولی اکید و در فاصله $(۰,\beta)$ صعودی اکید و مجدداً در فاصله $(\beta,+\infty)$ نزولی اکید است. پس می‌توان جدول زیر را در نظر گرفت:

x	$-\infty$		0		β		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

در نتیجه f دارای دو نقطه عطف به طول‌های ۰ و β می‌باشد.

پاسخ: گزینه ۳ قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۵% متوسط

$f'(x) = ۸x^۳ - ۲۴x^۲ + ۲ax$

نقطه $x = x_۰$، نقطه عطف تابع است که خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه افقی است. این یعنی $x = x_۰$ صفرهای دو تابع f' و f'' باید باشد. بنابراین تابع f'، حتماً باید به‌صورت زیر باشد:

$$f'(x) = ۸x^۳ - ۲۴x^۲ + ۲ax = ۸x(x - x_۰)^۲$$

$$= ۸x^۳ - ۱۶x_۰x^۲ + ۸x_۰^۲x$$

که از برابری این دو ضابطه به سادگی نتیجه می‌شود:

$$x_۰ = \frac{۳}{۲}\ ,\ a = ۹$$

پاسخ: گزینه ۳ قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۳% متوسط

محل تلاقی منحنی با مجانب افقی روی محور yها قرار دارد، پس نقطه‌ی $(۰\ ,\ \frac{۱}{۲})$ در منحنی صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۰+۰+b}{۰+۰+۱} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{x^۲+ax+\frac{۱}{۲}}{۲x^۲+x+۱}$$

از طرفی نمودار در نقطه‌ای به طول مثبت، بر محور x ها مماس است، لذا معادله‌ی تلاقی آن با محور x ها، ریشه‌ی مضاعف مثبت خواهد داشت، بنابراین $y = ۰$ (صورت کسر) ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد:

$$x^۲ + ax + \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow \Delta = a^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow a = \pm\sqrt{۲} \\ \text{ریشه مضاعف} \quad x = -\frac{a}{۲} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \end{cases}$$

بنابراین $a = -\sqrt{۲}$ است.

پاسخ: گزینه ۲ قلمچی ۱۳۹۸ درصد پاسخگویی ۱۳% متوسط

چون تابع فقط در یک نقطه تعریف نشده‌است (فقط یک مجانب قائم دارد)، مخرج تنها یک صفر دارد. پس:

$$\Delta_{\text{مخرج}} = b^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۴$$

از آنجا که مجانب قائم، طولی منفی دارد، پس $b = ۴$ خواهد بود.

نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲+ax-۶}{(x+۲)^۲}$ فقط در یک نقطه محور طول‌ها را قطع کرده‌است. بنابراین با توجه به شکل نمودار که (شبیه به) نمودار تابع هموگرافیک است و همچنین عبارت مخرج، صورت نیز باید عامل $x + ۲$ داشته باشد، یعنی به ازای $x = -۲$ مقدار آن صفر شود، بنابراین:

$$x^۲ + ax - ۶ = ۰ \xrightarrow{x=-۲} ۴ - ۲a - ۶ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

$$\Rightarrow a - b = -۵$$

پاسخ: گزینه ۳ قلمچی ۱۳۹۶ درصد پاسخگویی ۱۴% متوسط

مخرج مشترک می‌گیریم و ضابطه را به شکل تابع هموگرافیک تبدیل می‌کنیم:

$$y = \frac{(۲a+۱)\,x^۲+(۲b-a)\,x-b}{۲x-۱}$$

برای این‌که تابع فوق یک تابع هموگرافیک باشد باید ضریب $x^۲$ برابر صفر گردد.

$$۲a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

همچنین تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس نقطه‌ی (۱ , ۰) در معادله‌ی آن صدق می‌کند.

$$۱ = \frac{(۲b+\frac{۱}{۲})\times ۰-b}{۲\times ۰-۱} \Rightarrow ۱=b \rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}$$

پاسخ: گزینه ۲ | قلم‌چی ۱۳۹۸ | درصد پاسخگویی ۱۲٪ | متوسط

$$f'(x) = \frac{(x^۲+a)-۲x(x+۱)}{(x^۲+a)^۲} = \frac{-x^۲-۲x+a}{(x^۲+a)^۲}$$

طول اکسترمم‌های نمودار تابع، جواب‌های معادله $f'(x)=۰$ است.

$$\Rightarrow x^۲+۲x-a=۰ \quad (*)$$

با توجه به نمودار، این مقادیر $-b$ و $\frac{۳}{b}$ هستند.

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب طول نقاط} = (-b)\left(\frac{۳}{b}\right) = -۳ = -a \Rightarrow a=۳$$

$$\xrightarrow{(*)} x^۲+۲x-۳=(x+۳)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۳=-b \Rightarrow b=۳ \\ x=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۶$$

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۳۹۵ | درصد پاسخگویی ۱۵٪ | متوسط

خط $y=۰$ بر تابع مماس است. بنابراین معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد. $(\Delta=۰)$ داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{ax^۲-۲x+۲}{x^۲+b} \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow ax^۲-۲x+۲=۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴-۸a=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

مجانب افقی $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a=\frac{۱}{۲}$

محل برخورد نمودار با محور yها بالاتر از مجانب افقی است، پس:

$$f(۰)=\frac{۲}{b}>\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰<b<۴$$

بنابراین b نمی‌تواند ۵ باشد.

پاسخ: گزینه ۳ | قلم‌چی ۱۴۰۰ | درصد پاسخگویی ۳۲٪ | ساده

گزینهٔ «۳»

خط مماس افقی است. $f'(x)=۵x^۴-۱۸x^۲-۴x \Rightarrow f'(۲)=۸۰-۷۲-۸=۰$

تقعر رو به بالاست : $f''(x)=۲۰x^۳-۳۶x-۴ \Rightarrow f''(۲)=۱۶۰-۷۲-۴>۰$

پس نمودار گزینه «۳» درست است.

پاسخ: گزینه ۴ | قلم‌چی ۱۳۹۷ | درصد پاسخگویی ۲۵٪ | متوسط

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که مقدار مشتق تابع موردنظر در $x = 0$ برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع دره $x = 0$ افقی است) که این شرط تنها در گزینه «۴» برقرار است.

پاسخ: گزینه ۴ — قلم‌چی ۱۳۹۴ — درصد پاسخگویی ۲۱% — متوسط

گزینه‌ی «۴»

در تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x+1}$ ، مخرج کسر همواره مثبت است پس نمودار تابع فاقد مجانب قائم است در نتیجه گزینه‌ی (۱) نادرست است از طرفی:

مجانب افقی $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x)}{(x^2-x+1)^2} = 0$$

$\Rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ بنابراین گزینه‌ی (۴) می‌تواند صحیح باشد.

پاسخ: گزینه ۲ — قلم‌چی ۱۴۰۰ — درصد پاسخگویی ۲۳% — متوسط

گزینهٔ «۲»

با توجه به شکل، نمودار f در $x = 0$ نقطه عطف و خط مماس افقی دارد، یعنی:

$f'(0) = f''(0) = 0$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2ax; f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 + 24x + 2a = 0 \Rightarrow f''(0) = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

از طرفی تابع f در یک نقطه اکسترمم نسبی با طول منفی دارد، این نقطه را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = -3 \end{cases}$$

چون عرض این نقطه صفر است، پس داریم:

$f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 + b = 0 \Rightarrow b = 27$