مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۱ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

---

۱) $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$، اعداد طبیعی متوالی‌اند. اگر میانگین آن‌ها عددی فرد باشد، حاصل $۴a_۳ - a_۵$ را همواره به کدام صورت می‌توان نوشت؟ $(k \in N)$

۱) $۲k - ۱$
۲) $۲k - ۲$
۳) $۳k - ۳$
۴) $۳k + ۲$

۲) اگر $A = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n$ باشد، به ازای چند عدد n از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹۰\}$، عدد A زوج است؟

۱) ۴۴
۲) ۴۵
۳) ۲۲
۴) ۲۳

۳) اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه در کدام گزینه دو گزاره هم‌ارز <u>نیستند</u>؟

۱) P: n زوج است. q: $(n + ۱)^۲$ فرد است.
۲) P: $n + ۲$ فرد است. q: $(n - ۱)^۲$ زوج است.
۳) P: n فرد است. q: $(۲n + ۱)^۲$ فرد است.
۴) P: n زوج است. q: $(۳n + ۲)^۲$ زوج است.

۴) کدام یک از جفت گزاره‌های داده شدهٔ زیر هم ارز <u>نیستند</u>؟

۱) n یک عدد طبیعی زوج و $n^۲$ یک عدد طبیعی زوج است.
۲) n یک عدد طبیعی فرد و $n^۲$ یک عدد طبیعی فرد است.
۳) $۰ < a < ۱$ و $۰ < a^۲ < ۱$ $(a \in R)$
۴) $a < b$ و $a^۳ < b^۳$ $(a, b \in R)$

۵) کدام‌یک از قضایای زیر را <u>نمی‌توان</u> به‌صورت قضیهٔ دوشرطی نوشت؟

۱) $a > ۱ \Rightarrow a^۳ > a^۲$
۲) $a > b \Rightarrow a^۳ > b^۳$
۳) $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^۲ \geq ۰$ (a وb نامنفی هستند.)
۴) $a > ۱ \Rightarrow a^۲ > ۱$

۶) اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر و نابرابر باشند، آنگاه چند زوج مرتب (a, b) وجود دارد به گونه ای که رابطه ی $\frac{۱}{a-b} = \frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}$ برقرار باشد؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی شمار

۷) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ عددی زوج است؟

۱) ۴۴
۲) ۴۵
۳) ۴۹
۴) ۵۰

۸) اگر aوb دو عدد صحیح باشند به‌طوری که $۲a + ۳b | ۵a + ۷b$، حداقل مقدار $m + n$ به‌گونه‌ای که $۲a + ۳b | ma$ و $۲a + ۳b | nb$، کدام است؟ $(m, n \in N)$

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۹) باقی‌مانده تقسیم یک عدد اول بر ۶، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ **۲)** ۳
۳) ۴ **۴)** ۵

۱۰) به ازای چند مقدار طبیعی x، حاصل کسر $\frac{x^2+x-3}{x+1}$ عددی صحیح است؟

۱) ۴ **۲)** ۳
۳) ۲ **۴)** ۱

۱۱) اگر $x^3 - x$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، تفاضل بیشترین و کمترین عدد طبیعی دو رقمی x کدام است؟

۱) ۸۱ **۲)** ۷۸ **۳)** ۷۹ **۴)** ۸۰

۱۲) باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۱۵، از باقی‌مانده تقسیم $(-a)$ بر ۱۵، یک واحد بیشتر است. مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی دو رقمی a کدام است؟

۱) ۱۵ **۲)** ۱۶
۳) ۱۷ **۴)** ۱۸

۱۳) اگر عددی مانند k در Z باشد به‌طوری که $7 \mid 3k+2$، آنگاه به‌ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $49 \mid 9k^2+33k+a$ برقرار است؟

۱) ۱۴ **۲)** ۱۵
۳) ۱۶ **۴)** ۱۸

۱۴) اگر حاصل $[(3a,6a)\ ,\ [2a,6a^2]]$ همواره مضرب ۳۰ باشد، چند عدد طبیعی برای a در مجموعه $\{1,2,3,\dots,100\}$ وجود دارد؟

۱) ۵ **۲)** ۱۰
۳) ۲۰ **۴)** ۲۵

۱۵) اگر $a-b \mid a+b$، آنگاه کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی <u>نمی‌تواند</u> درست باشد؟

۱) $a-b \mid 2a$ **۲)** $a-b \mid 4a+b$
۳) $a-b \mid 3a+b$ **۴)** $a-b \mid 2b$

۱۶) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۸ و ۹ به‌ترتیب ۳ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۵
۳) ۷ **۴)** ۱۱

۱۷) اگر a، b و c سه عدد صحیح باشند، آنگاه چه تعداد از روابط زیر همواره برقرار است؟

الف) اگر $a \mid b+c$، انگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. ب) اگر $a \mid bc$، آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$.

پ) اگر $a \mid 2b$، انگاه $a \mid b^2$.

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۳

۱۸) مدیریت یک کارخانه برای جابه‌جایی کارکنان آن از درب ورودی تا محل کار از یک خودروی ون (با ظرفیت ۷ نفر) و یک خودروی سمند (با ظرفیت ۴ نفر) استفاده می‌کند. اگر تعداد کارکنان کارخانه ۶۷ نفر باشد و خودروها فقط با ظرفیت کامل حرکت کنند، تعداد حالت‌های جابه‌جایی کارکنان با این دو خودرو کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

۱۹) چند عدد طبیعی به صورت $\overline{۲x۳۵y}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰) چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد به طوری که عدد $a^۲ + ۲$ بر عدد $a + ۴$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۱) چند عدد به صورت $\overline{۵۱xy۳۲}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲) معادله هم‌نهشتی $۷۲x \overset{۳۱}{\equiv} ۱$ در مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۲۳) عدد $\overline{abcabc}$ بر کدام عدد ممکن است بخش‌پذیر نباشد؟

۱) ۹۱ ۲) ۱۲۱
۳) ۱۴۳ ۴) ۷۷

۲۴) اگر $a \overset{۳۰}{\equiv} ۱۸$ و $b \overset{۴۲}{\equiv} ۱۲$ باشد، آنگاه معادله سیاله $ax + by = c$ به ازای کدام مقدار c همواره دارای جواب است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰
۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۲۵) اگر باقی‌مانده تقسیم $۵^{۱۸} + a$ بر ۱۱ برابر صفر باشد، آنگاه کمترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳
۳) ۵ ۴) ۷

۲۶) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، معادلة سیالة $(۱۱n + ۳)x + (۴n + ۵)y = c$ به ازای هر عدد طبیعی دلخواه c، در مجموعة اعداد صحیح دارای جواب است؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۷ ۳) ۸۸ ۴) ۹۰

۲۷) به چند طریق می‌توان به‌وسیله ظرف‌های ۳ و ۷ لیتری غیر مدرج، ۸۰ لیتر آب را از یک تانکر تخلیه کرد؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۲۸) تعداد اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۵ که باقی‌مانده تقسیم هر کدام از آنها بر ۲۱ برابر ۴ باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

۲۹) چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که ۷ برابر آن به علاوه ۵ بر ۹ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۰) مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $۱۶x + ۹y = ۲^{۱۲}$ صدق می‌کند، چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۱ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

پنج عدد طبیعی و متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$n+۱, n+۲, n+۳, n+۴, n+۵$$

میانگین اعداد $a_۱$ تا $a_۵$ به صورت زیر است:

$$\frac{(n+۱)+(n+۲)+(n+۳)+(n+۴)+(n+۵)}{۵}$$

$$= \frac{۵n+۱۵}{۵} = n+۳$$

بنابراین میانگین پنج عدد طبیعی متوالی برابر با عدد وسطی یعنی $(n+۳)$ است. میانگین عددی فرد است، در نتیجه $(n+۳)$ عددی فرد می‌باشد، پس $(n+۵)$ هم عددی فرد است.

$$a_۳ = n+۳ \Rightarrow a_۳ = ۲k+۱$$

$$a_۵ = n+۵ \Rightarrow a_۵ = ۲k'+۱$$

$$۴a_۳ - a_۵ = (۸k+۴) - (۲k'+۱) = ۲\underbrace{(۴k - k'+۲)}_{k''} - ۱ = ۲k''-۱$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

مجموع اعداد ۱، ۲، ... وn برابر است با:

$$A = ۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

اگر A زوج باشد، داریم:

$$A = \frac{n(n+۱)}{۲} = ۲k \Rightarrow n(n+۱) = ۴k$$

از آنجا که n و $n+۱$ دو عدد متوالی هستند، هر دو نمی‌توانند مضرب ۲ باشند، بنابراین n یا $n+۱$ مضرب ۴ خواهد بود:

$$\begin{cases} n = ۴q \Rightarrow ۱ \le ۴q \le ۹۰ \xrightarrow{q\in Z} ۱ \le q \le ۲۲ \\ n = ۴q-۱ \Rightarrow ۱ \le ۴q-۱ \le ۹۰ \xrightarrow{q\in Z} ۱ \le q \le ۲۲ \end{cases}$$

هر یک از مجموعه‌های فوق ۲۲ عضو دارند؛ بنابراین به ازای ۴۴ مقدار مختلف n، عدد A زوج می‌باشد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۱»: اگرn زوج باشد، آنگاه $n+1$ و در نتیجه $(n+1)^2$ فرد هستند و برعکس اگر $(n+1)^2$ فرد باشد، آنگاه $n+1$ فرد و n زوج است.

گزینه «۲»: اگر $n+2$ فرد باشد، آنگاه n فرد و $n-1$ زوج است و در نتیجه $(n-1)^2$ زوج می‌باشد و برعکس اگر $(n-1)^2$ زوج باشد، آنگاه $n-1$ زوج و n فرد است و در نتیجه $n+2$ فرد می‌باشد.

گزینه «۳»: اگر n فرد باشد، آنگاه $2n+1$ و در نتیجه $(2n+1)^2$ فرد هستند ولی عکس این رابطه برقرار نیست، زیرا $(2n+1)^2$ همواره عددی فرد است و به زوج و فرد بودن n بستگی ندارد.

گزینه «۴»: اگرn زوج باشد، آنگاه $3n+2$ و در نتیجه $(3n+2)^2$ زوج هستند و برعکس اگر $(3n+2)^2$ زوج باشد، آنگاه $3n+2$ و در نتیجه n زوج هستند.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

اگر $1 < a < 0$ و $(a \in R)$ می‌توان نتیجه گرفت که $0 < a^2 < 1$ امّا از رابطه $0 < a^2 < 1$ نتیجه می‌شود $0 < a < 1$ یا $-1 < a < 0$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

عکس قضیهٔ شرطی $a > 1 \Rightarrow a^2 > 1$ برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $b = -2$ باشد، آنگاه $a^2 > 1$ و $a < 1$ است.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{b-a}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{-ab}$$
$$\Rightarrow (a-b)^2 = -ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = -ab$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab = 0 \xrightarrow{(a-b)^2=-ab} a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 0$$

رابطه ی اخیر به ازای هیچ دو عدد حقیقی غیر صفر و نابرابر a و b برقرار نیست، پس هیچ زوج مرتبی مانند (a,b) وجود ندارد که در رابطه داده شده صدق کند.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید $\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$ عددی زوج باشد، در این صورت عدد $\frac{n(n+۱)}{۲}$ نیز قطعاً عددی زوج است و داریم:

$\frac{n(n+۱)}{۲} = ۲k(k \in Z) \Rightarrow n(n+۱) = ۴k$

رابطه فوق در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از دو عدد متوالی n و n + ۱ بر ۴ بخش‌پذیر باشد، یعنی عدد n به یکی از دو صورت $۴k'$ یا $۴k'-۱$ $(k' \in Z)$ باشد، داریم:

$۱۰ \le ۴k' \le ۹۹ \xrightarrow{k' \in Z} ۳ \le k' \le ۲۴ \rightarrow$ ۲۲ عدد

$۱۰ \le ۴k'-۱ \le ۹۹ \Rightarrow ۱۱ \le ۴k' \le ۱۰۰ \xrightarrow{k' \in Z} ۳ \le k' \le ۲۵ \rightarrow$ ۲۳ عدد

پس در مجموع ۴۵ عدد طبیعی دو رقمی n با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b|۲a+۳b \xrightarrow{\times ۵} ۲a+۳b|۱۰a+۱۵b \\ ۲a+۳b|۵a+۷b \xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳b|۱۰a+۱۴b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a+۳b|b$$

(۲)

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b|۵a+۷b \xrightarrow{\times ۳} ۲a+۳b|۱۵a+۲۱b \\ ۲a+۳b|۲a+۳b \xrightarrow{\times ۷} ۲a+۳b|۱۴a+۲۱b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a+۳b|a$$

$(۱),(۲) \Rightarrow \min(m+n) = ۱+۱ = ۲$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k+۱$ یا $p = ۶k+۵$ نوشته می‌شود، یعنی باقی‌مانده تقسیم آن بر عدد ۶، یکی از دو عدد ۱ یا ۵ است. از طرفی باقی‌مانده تقسیم دو عدد اول ۲ و ۳ بر ۶، برابر خود این اعداد است. پس در مجموع، ۴ باقیمانده متفاوت می‌توان یافت.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر حاصل کسر $\frac{x^2+x-3}{x+1}$ عددی صحیح شود، آنگاه $x+1 \mid x^2+x-3$ و در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{r} x+1 \mid x^2+x-3 \\ x+1 \mid x(x+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x+1 \mid -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=1 & \Rightarrow x=0 \\ x+1=-1 & \Rightarrow x=-2 \\ x+1=3 & \Rightarrow x=2 \\ x+1=-3 & \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

از بین مقادیر به دست آمده، فقط $x=2$ مقداری طبیعی است.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$x^3 - x = 13q \Rightarrow x(x^2-1) = 13q$$

$$x(x-1)(x+1) = 13q$$

حاصل‌ضرب سه عامل x و $x-1$ و $x+1$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است، بنابراین x یا $x-1$ یا $x+1$ باید مضرب ۱۳ باشد:

$$1)\ x = 13k \xrightarrow{x\ \text{دورقمی است}} x_{min} = 13\ ,\ x_{max} = 91$$

$$2)\ x-1 = 13k \Rightarrow x = 13k+1 \xrightarrow{x\ \text{دورقمی است}} x_{min} = 14, x_{max} = 92$$

$$3)\ x+1 = 13k \Rightarrow x = 13k-1 \xrightarrow{x\ \text{دورقمی است}} x_{min} = 12, x_{max} = 90$$

در بین مقادیر فوق، کمترین مقدار x عدد ۱۲ و بیشترین مقدار x، ۹۲ است که تفاضل آنها $92 - 12 = 80$ می‌باشد.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۵، برابر r باشد، آنگاه داریم:

$a = ۱۵q + r \xrightarrow{\times(-۱)} -a = -۱۵q - r = -۱۵q - ۱۵ + ۱۵ - r$

$\Rightarrow a = ۱۵(-q - ۱) + ۱۵ - r$

بنابراین باقی مانده تقسیم عدد $(-a)$ بر ۱۵، برابر $۱۵ - r$ است. با توجه به فرض مسئله داریم:

$r - (۱۵ - r) = ۱ \Rightarrow ۲r - ۱۵ = ۱ \Rightarrow ۲r = ۱۶ \Rightarrow r = ۸$

$\Rightarrow a = ۱۵q + ۸$

بزرگ‌ترین عدد دو رقمی a به ازای $q = ۶$ حاصل می‌شود:

$a_{max} = ۱۵ \times ۶ + ۸ = ۹۸ \Rightarrow$ مجموع ارقام $= ۹ + ۸ = ۱۷$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$
\begin{aligned}
&۷ \mid ۳k + ۲ \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۲} ۴۹ \mid (۳k + ۲)^۲ \\
&\Rightarrow ۴۹ \mid ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ \quad (۱) \\
&۷ \mid ۳k + ۲ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } ۷} ۴۹ \mid ۷(۳k + ۲) \\
&\Rightarrow ۴۹ \mid ۲۱k + ۱۴ \quad (۲) \\
&(۱),(۲) \Rightarrow ۴۹ \mid (۹k^۲ + ۱۲k + ۴) + (۲۱k + ۱۴) \\
&\Rightarrow ۴۹ \mid ۹k^۲ + ۳۳k + ۱۸
\end{aligned}
$$

بنابراین در بین گزینه‌های داده شده، به ازای $a = ۱۸$، رابطه برقرار است.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

$۳a|۶a \Rightarrow (۳a, ۶a) = ۳a$

$۲a|۶a^۲ \Rightarrow [۲a, ۶a^۲] = ۶a^۲$

از طرفی $۳a|۶a^۲$، پس $[۳a, ۶a^۲]$ برابر با $۶a^۲$ خواهد شد، در نتیجه داریم:

$۳۰|۶a^۲ \xrightarrow{\div ۶} ۵|a^۲ \Rightarrow a = ۵k \Rightarrow ۱ \le ۵k \le ۱۰۰$

$\xrightarrow{k \in Z} ۱ \le k \le ۲۰ \Rightarrow$ ۲۰ مقدار برای k یافت می‌شود.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

گزینهٔ «۱»: $a-b|2a$ ، گزینهٔ «۴»: $a-b|2b$

$$\begin{cases} a-b|a+b \\ a-b|a-b \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع و تفاضل}} \begin{cases} a-b|2a \\ a-b|2b \end{cases}$$

گزینه "۳": $a-b|3a+b$

$$\begin{cases} a-b|a+b \\ a-b|2a \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} a-b|3a+b$$

مثال نقض گزینه «۲»: $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b|a+b \\ a-b\nmid 4a+b \end{cases}$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 8k+3 = 4(2k)+3 = 4q+3$$

$$a = 9k'+7 = 3(3k')+6+1 = 3(3k'+2) = 3q'+1$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3q'+1 \xrightarrow{\times 4} 4a = 12q'+4 \\ a = 4q+3 \xrightarrow{\times 3} 3a = 12q+9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$a = 12(q'-q) - 5 = 12(q'-q) - 12 + 12 - 5$$

$$\Rightarrow a = 12(q'-q-1) + 7 = 12q''+7 (q'' \in Z)$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۲، برابر ۷ است.

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۱

هیچ‌کدام از روابط داده شده در حالت کلی صحیح نیستند. به عنوان مثال نقض داریم:

الف) اگر $a=2$، $b=3$ و $c=5$ باشد، آنگاه $a|b+c$ ولی $a\nmid b$ و $a\nmid c$.

ب) اگر $a=8$، $b=2$ و $c=4$ باشد، آنگاه $a|bc$ ولی $a\nmid b$ و $a\nmid c$.

پ) اگر $a=2$ و $b=3$ باشد، آنگاه $a|2b$ ولی $a\nmid$.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فرض کنید خودروی ون x بار و خودروی سمند y بار کارکنان کارخانه را جابه‌جا کنند. در این‌صورت داریم:

$$۷x + ۴y = ۶۷ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow -x \overset{۴}{\equiv} -۱ \Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۴k + ۱ (k \in Z)$$

$$۷(۴k + ۱) + ۴y = ۶۷ \Rightarrow ۴y = -۲۸k + ۶۰ \Rightarrow y = -۷k + ۱۵$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \Rightarrow ۴k + ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۴} \\ y \geq ۰ \Rightarrow -۷k + ۱۵ \geq ۰ \Rightarrow k \leq \frac{۱۵}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{۱}{۴} \leq k \leq \frac{۱۵}{۷}$$

$$\xrightarrow{k \in Z} k = ۰, ۱, ۲$$

بنابراین سه حالت برای جابه‌جایی کارکنان با این دو خودرو وجود دارد.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$\overline{۲x۳۵y} \overset{۹}{\equiv} ۲ + x + ۳ + ۵ + y \overset{۹}{\equiv} x + y + ۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow x + y \overset{۹}{\equiv} -۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۸ \\ x + y = ۱۷ \end{cases}$$

$$\overline{۲x۳۵y} \overset{۱۱}{\equiv} y - ۵ + ۳ - x + ۲ \overset{۱۱}{\equiv} y - x \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} y \Rightarrow x = y$$

با توجه به روابط به دست آمده تنها حالت ممکن آن است که $x = y = ۴$ باشد، یعنی تنها یک عدد با مشخصات موردنظر وجود دارد.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق ویژگی‌های رابطه عاد کردن (بخش‌پذیری) داریم:

$$\left.\begin{array}{r} a+۴|a+۴ \xrightarrow{\times a} a+۴|a^۲+۴a \\ a+۴|a^۲+۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+۴|۴a-۲$$

$$\left.\begin{array}{r} a+۴|a+۴ \xrightarrow{\times ۴} a+۴|۴a+۱۶ \\ a+۴|۴a-۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+۴|۱۸$$

بنابراین $a+۴$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۸ باشد. با توجه به اینکه a عددی طبیعی است، پس $a+۴ \geq ۵$ و در نتیجه داریم:

$$a+۴=۶ \Rightarrow a=۲$$

$$a+۴=۹ \Rightarrow a=۵$$

$$a+۴=۱۸ \Rightarrow a=۱۴$$

یعنی به ازای ۳ عدد طبیعی a ، $a^۲+۲$ بر عدد $a+۴$ بخش‌پذیر است.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد. داریم:

$$\overline{۵۱xy۳۲} \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵+۱+x+y+۳+۲ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow x+y \overset{۹}{\equiv} -۱۱ \overset{۹}{\equiv} -۱۱+۲\times۹ \overset{۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow \begin{cases} x+y=۷ \\ x+y=۱۶ \end{cases}$$

$$\overline{۵۱xy۳۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲-۳+y-x+۱-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow y-x \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow \begin{cases} y-x=۵ \\ y-x=-۶ \end{cases}$$

حالت $x+y=۱۶$ نمی‌تواند در این سؤال برقرار باشد، چون در این صورت x و y هر دو برابر ۸ و یا یکی برابر ۷ و دیگری برابر ۹ است که با توجه به مقادیر $y-x$ امکان‌پذیر نیست.

دو حالت باقی‌مانده را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+y=۷ \\ -x+y=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=۷ \\ -x+y=-۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱۳}{۲} \\ y=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با توجه به اینکه y,x رقم هستند، پس مقادیر کسری برای آن‌ها قابل قبول نیست و تنها یک عدد (عدد ۵۱۱۶۳۲) با شرایط موردنظر وجود دارد.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

$$۷۲x \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۰x \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \overset{۳۱}{\equiv} -۳۰ \xrightarrow[(۱۰,۳۱)=۱]{\div ۱۰} x \overset{۳۱}{\equiv} -۳$$

$$\Rightarrow x = ۳۱k - ۳ \quad (k \in Z)$$

$$۱۰۰ \le ۳۱k - ۳ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۳ \le ۳۱k < ۱۰۰۳$$

$$\xrightarrow{k \in Z} ۴ \le k \le ۳۲$$

تعداد جواب‌ها : $۳۲ - ۴ + ۱ = ۲۹$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \overline{abcabc} = \overline{abc} \times ۱۰۰۰ + \overline{abc}$$

$$= \overline{abc}(۱۰۰۰ + ۱) = ۱۰۰۱\overline{abc}$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۰۰۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۷}{\equiv} ۰, A \overset{۱۱}{\equiv} ۰, A \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

گزینه «۱»: $A \overset{[۷,۱۳]}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۹۱}{\equiv} ۰$

گزینه «۳»: $A \overset{[۱۱,۱۳]}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۱۴۳}{\equiv} ۰$

گزینه «۴»: $A \overset{[۷,۱۱]}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۷۷}{\equiv} ۰$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$a \overset{۳۰}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{۶|۳۰} a \overset{۶}{\equiv} ۱۸ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۶|a \quad (۱)$$

$$b \overset{۴۲}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{۶|۴۲} b \overset{۶}{\equiv} ۱۲ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۶|b \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۶|(a,b)$$

معادله سیاله $ax + by = c$ در صورتی دارای جواب است که $(a,b)|c$.

بنابراین با توجه به رابطه به دست آمده $۶|c$ که در بین گزینه‌ها تنها عدد ۲۴ مضرب ۶ است.

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

$$۵^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵^۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۵$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۵^{۱۸} \overset{۱۱}{\equiv} ۵^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵^{۱۸} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۴ + a$$

بنابراین $۴ + a$ باید مضرب ۱۱ باشد که در نتیجه کمترین مقدار طبیعی a، برابر $۷ = ۴ - ۱۱$ است.

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

فرض کنید $d = (۱۱n + ۳, ۴n + ۵)$ باشد. معادلهٔ سیالهٔ موردنظر در صورتی به ازای هر عدد طبیعی دلخواه c، در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است که $d = ۱$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} d|۴n + ۵ \xrightarrow{\times ۱۱} d|۴۴n + ۵۵ \\ d|۱۱n + ۳ \xrightarrow{\times ۴} d|۴۴n + ۱۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|۴۳ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۴۳$$

بنابراین کافی است مقادیری از n را که به ازای آن $d = ۴۳$ می‌شود، پیدا کرده از مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی حذف کنیم. داریم:

$$۴۳|۴n + ۵ \Rightarrow ۴n + ۵ \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۴n \overset{۴۳}{\equiv} -۵ \overset{۴۳}{\equiv} -۵ - ۴۳ \overset{۴۳}{\equiv} -۴۸$$

$$\xrightarrow[(۴,۴۳)=۱]{\div ۴} n \overset{۴۳}{\equiv} -۱۲ \Rightarrow n = ۴۳k - ۱۲ (k \in Z)$$

$$\begin{cases} k = ۱ \Rightarrow n = ۳۱ \\ k = ۲ \Rightarrow n = ۷۴ \end{cases}$$

پس تنها به ازای دو عدد طبیعی دو رقمی n، $d = ۴۳$ است و در نتیجه به ازای $۸۸ = ۲ - ۹۰$ عدد طبیعی دو رقمی، $d = ۱$ است.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

اگر تعداد ظرف‌های ۳ و ۷ لیتری را به‌ترتیب با x و y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$۳x + ۷y = ۸۰ \Rightarrow ۷y \overset{۳}{\equiv} ۸۰ \Rightarrow y \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow y = ۳k + ۲ \ (k \in Z)$$

$$۳x + ۷(۳k + ۲) = ۸۰ \Rightarrow ۳x = -۲۱k + ۶۶ \Rightarrow x = -۷k + ۲۲$$

تعداد ظرف‌ها عددی حسابی است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq ۰ \Rightarrow -۷k + ۲۲ \geq ۰ \Rightarrow k \leq \frac{۲۲}{۷} \\ y \geq ۰ \Rightarrow ۳k + ۲ \geq ۰ \Rightarrow k \geq \frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in Z} ۰ \leq k \leq ۳$$

به ازای مقادیر $k = ۰, ۱, ۲, ۳$ ، تعداد ظرف‌های ۳ و ۷ لیتری عددی حسابی است، پس به چهار طریق می‌توان ۸۰ لیتر آب را به‌وسیله ظرف‌های ۳ و ۷ لیتری تخلیه نمود.

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

$$a = ۲۱q + ۴ \xrightarrow{a\ \text{مضرب ۵ است}} ۵k = ۲۱q + ۴$$

$$\Rightarrow ۵k \overset{۲۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵k \overset{۲۱}{\equiv} ۴ + ۲۱ \overset{۲۱}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow[(۵,۲۱)=۱]{\div ۵}$$

$$k \overset{۲۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow k = ۲۱m + ۵ \Rightarrow a = ۵(۲۱m + ۵) = ۱۰۵m + ۲۵$$

$$۱۰۰ \leq a \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۱۰۵m + ۲۵ \leq ۹۹۹$$

$$\Rightarrow ۷۵ \leq ۱۰۵m \leq ۹۷۴ \xrightarrow{m \in Z} ۱ \leq m \leq ۹$$

بنابراین ۹ مقدار برای m و در نتیجه ۹ عدد طبیعی a با مشخصات موردنظر وجود دارد.

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فرض کنید عددی طبیعی که دارای ویژگی صورت سؤال باشد را با x نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$۷x + ۵ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} -۵ \overset{۹}{\equiv} -۱۴$$

$$\xrightarrow[(۷,۹)=۱]{\div ۷} x \overset{۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow x = ۹k - ۲ (k \in Z)$$

$$۱۰ \leq x \leq ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \leq ۹k - ۲ \leq ۹۹ \Rightarrow ۱۲ \leq ۹k \leq ۱۰۱$$

$$\xrightarrow{k \in Z} ۲ \leq k \leq ۱۱$$

بنابراین به ازای ۱۰ مقدار k، x عددی طبیعی و دو رقمی است.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$۱۶x + ۹y = ۲^{۱۲} \Rightarrow ۱۶x \overset{۹}{\equiv} ۲^{۱۲} = ۲^{۴} \times ۲^{۸}$$

$$\xrightarrow[(۱۶,۹)=۱]{\div ۱۶} x \overset{۹}{\equiv} ۲^{۸} = ۲۵۶ \Rightarrow x \overset{۹}{\equiv} ۲ + ۵ + ۶ \overset{۹}{\equiv} ۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow x = ۹k + ۴$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k = ۱۱$ حاصل می‌شود:

$$k = ۱ \Rightarrow x = ۹ \times ۱۱ + ۴ = ۱۰۳ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۴$$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۲ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

---

۱) اندازه گراف r- منتظم از مرتبه p برابر ۱۶ است. چند مقدار زوج برای r وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۲) درجه رأس‌های یک گراف ۵ ، ۴ ، ۴ ، ۳ ، ۳ و ۱ چند دور با طول ۴، موجود است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳) گراف ساده G از مرتبه ۷ است. اگر $\delta(G) =$ ۳ باشد، آنگاه حداقل مقدار $\Delta(G)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۴) حداکثر تعداد یال‌های یک گراف k- منتظم غیرکامل از مرتبه ۷ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۵) حاصل ضرب درجات رئوس یک گراف مرتبه ۶، برابر ۹۶ است. اندازه این گراف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

۶) در گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a,b,c,d,e\}$، $N_G(a) = \{c\}$، $N_G(b) = \{e\}$، $N_G(d) = \varnothing$ است و دو رأس c و e مجاور یکدیگرند. در گراف $\bar{G}$، چند مسیر از رأس a به رأس c وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

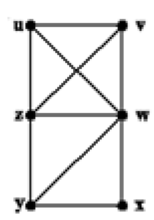
۷) تعداد کل مسیرها در یک گراف ۲-منتظم همبند از مرتبه n کدام است؟

۱) $\binom{n}{2}$ ۲) n^2 ۳) ۲n ۴) $\binom{n+1}{2}$

۸) گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱، فقط دارای رئوسی از درجه‌های ۲، ۳ و ۴ است. اگر تعداد رأس‌های درجه ۲ در این گراف، دو واحد بیشتر از تعداد رأس های درجه ۴ باشد، آنگاه این گراف چند رأس از درجه ۳ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲ یا ۴

۹) در گراف شکل مقابل، چند مسیر از u به v وجود دارد؟



۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰ چند گراف ساده از مرتبه ۵ می‌توان رسم کرد، که اندازه آن برابر ۸ باشد؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

۱۱ اگر به ازای هر دو رأس x و y از گراف G، $N_G[x] = N_G[y]$ و مجموع مرتبه و اندازه گراف G، برابر ۲۱ باشد، آن‌گاه $\Delta(G)$ کدام است؟

۱) ۵ **۲)** ۶
۳) ۷ **۴)** ۸

۱۲ گراف $K_۴$ دارای چند زیرگراف با اندازه ۲ است؟

۱) ۱۵ **۲)** ۱۸ **۳)** ۲۱ **۴)** ۲۷

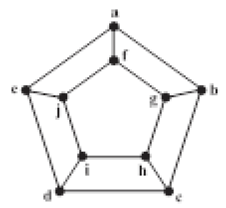
۱۳ گراف $P_۶$ چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۷ **۲)** ۸
۳) ۶ **۴)** ۹

۱۴ اگر گراف G از مرتبه ۱۸ و ۱۳ = $\delta(G)$ باشد، آن‌گاه گراف $\overline{G}$ را با کم‌تر از کدام تعداد رأس نمی‌توان احاطه کرد؟

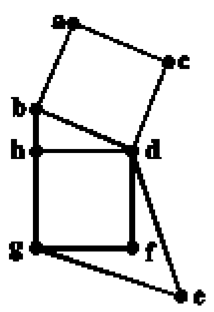
۱) ۴ **۲)** ۵
۳) ۶ **۴)** ۷

۱۵ گراف G مطابق شکل مقابل مفروض است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a دارد؟



۱) ۱ **۲)** ۲
۳) ۳ **۴)** ۴

۱۶ گراف G مطابق شکل مقابل است. عدد احاطه‌گری گراف $\overline{G}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷ فرض کنید a و b دو رأس از یک گراف مرتبه ۹ باشند. اگر ۴ = deg(a) و $N_G[b]$ دارای ۴ عضو باشد، آنگاه حداقل و حداکثر چند رأس این گراف توسط رئوس a و b احاطه <u>نمی‌شوند</u>؟

۱) ۰- ۴ **۲)** ۰- ۳
۳) ۱- ۳ **۴)** ۱- ۴

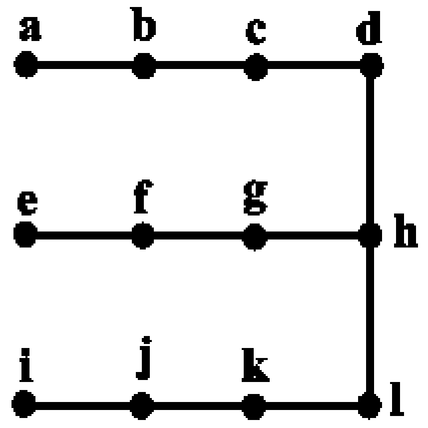
۱۸) گراف ۳- منتظم G از مرتبه ۶، دوری به طول ۳ ندارد. این گراف چند γ- مجموعه دارد؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۱۹) چند گراف متمایز ۲- منتظم از مرتبه ۹ می‌توان رسم کرد که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد؟

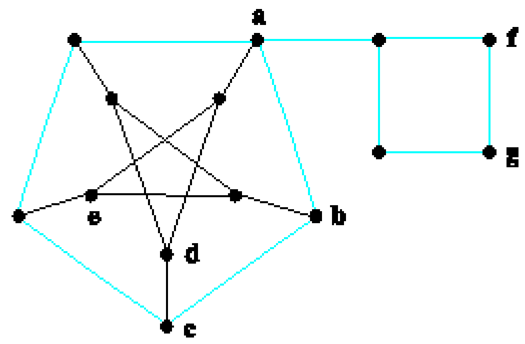
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۰) گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۱) کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟

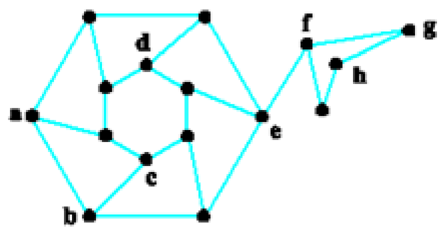


۱) $\{a, c, e, g\}$
۲) $\{a, d, e, g\}$
۳) $\{a, b, d, e\}$
۴) $\{a, d, e, f\}$

۲۲) حداقل مقدار عدد احاطه‌گری یک گراف ۳- منتظم از مرتبه p و اندازه ۱۵ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۳) کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟



۱) $\{a, b, c, d, h\}$
۲) $\{b, c, e, d, g\}$
۳) $\{a, c, e, d, h\}$
۴) $\{a, c, e, d, g\}$

۲۴) در گراف G با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$، $N_G(a) = \{d, f\}$، $N_G(b) = \{c, e\}$، $N_G(c) = \{b, h\}$، $N_G(g) = \{d, h, f\}$، $N_G(h) = \{g, e, c\}$ است. اگر هیچ دو رأسی از میان رأس‌های d، e و f مجاور یکدیگر نباشند، عدد احاطه‌گری گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵) عدد احاطه‌گری گرافی از مرتبه ۷، برابر ۲ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۲۰

۲۶) اختلاف تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم دو گراف P_6 و C_6 کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

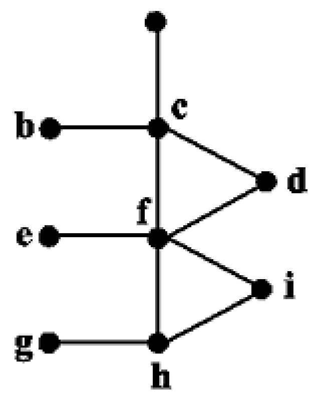
۲۷) گراف P_8 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۸) یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶، چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۵

۲۹) گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۰) کدام‌یک از گراف‌های زیر، فاقد مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم است؟

۱) P_3
۲) P_4
۳) P_5
۴) P_6

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۲ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

به گرافی که درجه تمامی رئوس آن برابر باشد، گراف منتظم گفته می‌شود. در هر گراف r- منتظم، رابطه $rp = ۲q$ برقرار است. (r همان درجه هر راس است)

داریم:

$$rp = ۲q \to rp = ۲ \times ۱۶$$
$$\to rp = ۳۲ = ۱ \times ۳۲ = ۲ \times ۱۶ = ۴ \times ۸$$

با توجه به آن‌که $r < p$ است، تنها دو مقدار زوج ۲ و ۴ برای r وجود دارد.

سوال ۲

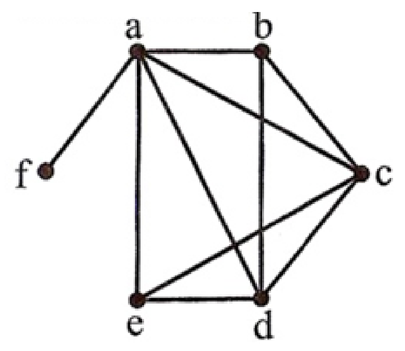
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

دورهای به طول ۴ در این گراف عبارتند از:

abdea , abcda , abcea , acdea

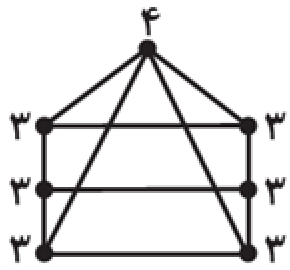
aceda , abdca , adcea , adbca , bdecb



سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

در هر گراف ساده، $\delta \leq \Delta$است. اگر ۳ = $\Delta(G)$ باشد، آنگاه با توجه به مقدار $\delta(G)$ ، تمامی رئوس گراف از درجه ۳ هستند. با توجه به اینکه گراف ۳- منتظم از مرتبه ۷ وجود ندارد، پس این حالت امکان پذیر نیست و در نتیجه حداقل مقدار $\Delta(G)$ برابر ۴ است. به عنوان مثال به گراف G در شکل زیر توجه کنید:



سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد. از طرفی گراف
۶-منتظم از مرتبه ۷، همان گراف کامل $K_۷$ است، پس بیشترین تعداد یال‌های یک گراف منتظم غیرکامل از مرتبه ۷، مربوط به گراف ۴-منتظم است. در این گراف، درجه همگی رأس‌ها برابر ۴ است، پس داریم:

$$۲q = ۷ \times ۴ = ۲۸ \Rightarrow q = ۱۴$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

عدد ۹۶ را می‌توان به‌صورت ۳×۲^۵ نوشت. با توجه به این‌که تعداد رئوس فرد گراف باید عددی زوج باشد، تنها حالت ممکن برای درجات رئوس این گراف به‌صورت ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ و ۴ است.

در این گراف داریم:

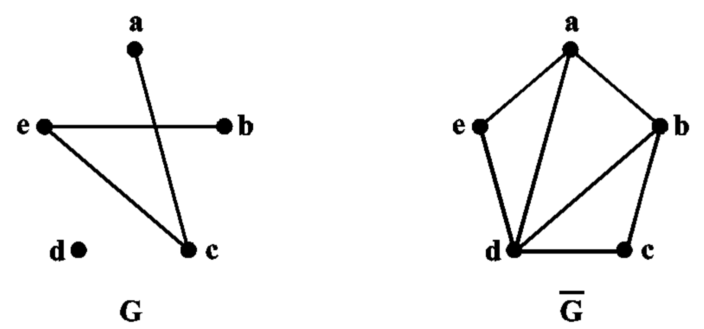
$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = ۴ + ۳ + ۳ \times ۲ + ۱ = ۱۴$$
$$\Rightarrow ۲q = ۱۴ \Rightarrow q = ۷$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به تعریف ارائه شده در صورت سؤال، گراف G و مکمل آن به‌صورت زیر هستند:



مسیرهای موجود از رأس a به رأس c در گراف G عبارت‌اند از:

abc, abdc, adc, adbc, aedc, aedbc

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

بین هر دو رأس متمایز یک گراف ۲-منتظم همبند از مرتبه n (گراف C_n) دقیقاً دو مسیر وجود دارد.

$$۲\binom{n}{۲} = ۲\frac{n(n-۱)}{۲} = n^۲ - n$$

از طرفی گراف C_n دارای n مسیر به‌طول صفر است (از هر رأس به خودش، مسیری به طول صفر وجود دارد)، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل مسیرها} = (n^۲ - n) + n = n^۲$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

فرض کنید تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ در این گراف به‌ترتیب برابر x و y باشد. در این‌صورت تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر $y + ۲$ است و داریم:

$$p = ۸ \Rightarrow x + y + y + ۲ = ۸ \Rightarrow x + ۲y = ۶$$

$$۲q = ۲۲ \Rightarrow ۳x + ۴y + ۲(y + ۲) = ۲۲$$

$$\Rightarrow ۳x + ۶y = ۱۸ \Rightarrow x + ۲y = ۶$$

با توجه به اینکه تعداد رأس‌های فرد یک گراف همواره عددی زوج است، پس مقدار x یعنی تعداد رأس‌های درجه ۳ برابر ۲ یا ۴ است.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

$u - v$ مسیرها در این گراف عبارت‌اند از:

مسیر به طول ۱: uv

مسیر به طول ۲: uwv و uzv

مسیر به طول ۳: uwzv و uzwv

مسیر به طول ۴: uwyzv و uzywv

مسیر به طول ۵: uwxyzv و uzyxwv

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

گراف مورد نظر را G می‌نامیم. گراف G، ۸ یال و گراف $K_۵$، $۱۰ = \frac{۵\times۴}{۲}$ یال دارد. این یعنی گراف G دو یال کم‌تر از گراف $K_۵$ دارد. بنابراین برای رسم G کافی است، دو یال از $K_۵$ جدا کنیم. حال می‌توانیم دو یال متصل به یک رأس یا دو یال غیرمتصل به یک رأس را جدا کنیم، در نتیجه دو گراف متمایز برای G می‌توانیم رسم کنیم.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ«۱»

اگر a یکی از رئوس گراف G باشد، آن‌گاه $N_G[a]$ مجموعه همسایگی بسته رأس a و شامل رأس a و تمام رأس‌های مجاور با a در گراف G است. اگر $N_G[x] = N_G[y]$ باشد، آن‌گاه حتماً یال xy در گراف G وجود دارد و چون این فرض برای هر دو رأس دلخواه از گراف G برقرار است، پس گراف G، یک گراف کامل است. در این گراف داریم:

$$p + q = ۲۱ \Rightarrow p + \frac{p(p-۱)}{۲} = ۲۱ \Rightarrow \frac{p^۲+p}{۲} = ۲۱$$

$$\Rightarrow p(p+۱) = ۴۲ \xrightarrow{p>۰} p = ۶$$

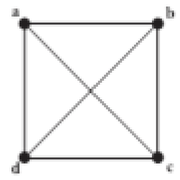
در گراف $K_۶$، درجه همه رأس‌ها برابر ۵ است، پس $\Delta(G) = ۵$ می‌باشد.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

در گراف $K_۴$، زیرگراف‌های با اندازه ۲ را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

الف) زیر گراف‌های از مرتبه ۴: در این حالت کافی است از میان ۶ یال گراف، ۲ یال را انتخاب نماییم. در نتیجه تعداد این زیرگراف‌ها برابر است با: $\binom{۶}{۲} = ۱۵$



ب) زیرگراف‌های از مرتبه ۳: در این حالت، ابتدا باید ۳ رأس از میان ۴ رأس گراف را انتخاب نمود. به عنوان مثال اگر سه رأس a، b و c انتخاب شوند، آنگاه برای داشتن زیرگرافی با اندازه ۲، کافی است ۲ یال را از میان ۳ یال موجود انتخاب نمود.

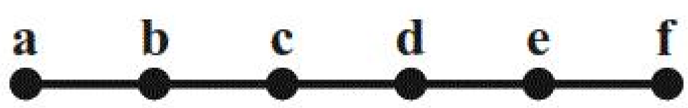
بنابراین تعداد این دسته از زیرگراف‌ها برابر است با: $\underset{\text{انتخاب ۳ رأس}}{\binom{۴}{۳}} \times \underset{\text{انتخاب ۲ یال}}{\binom{۳}{۲}} = ۱۲$

پس تعداد کل زیرگراف‌های مورد نظر برابر است با: $۱۵ + ۱۲ = ۲۷$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۱

گراف $P_۶$ فقط دارای یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم به صورت $\{b, e\}$ است، پس فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال دو عضوی دارد. از طرفی هر زیرمجموعه سه عضوی از رئوس گراف $P_۶$ که شامل یک رأس از بین a و b، یک رأس از بین c و d و یک رأس از بین e و f باشد، یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است که تعداد این مجموعه‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$. از بین این ۸ مجموعه، تنها دو مجموعه $\{b, d, e\}$ و $\{b, c, e\}$ مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیستند، چون شامل مجموعه $\{b, e\}$ می‌باشند.



گراف $P_۶$ فاقد مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی یا بیشتر است، پس در مجموع $۶ + ۱ = ۷$ مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

مرتبه دو گراف G و $\overline{G}$ برابر یکدیگر است، بنابراین اگر مرتبه گراف $\overline{G}$ را با n نمایش دهیم، $n = ۱۸$ است. از طرفی رأسی که در گراف G دارای مینیمم درجه (δ) باشد، در گراف $\overline{G}$ دارای ماکزیمم درجه (Δ) است. اگر این رأس را با v نمایش دهیم، داریم:

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - ۱ \Rightarrow \delta(G) + \Delta(\overline{G}) = n - ۱$$

$$\Rightarrow ۱۳ + \Delta(\overline{G}) = ۱۸ - ۱ \Rightarrow \Delta(\overline{G}) = ۴$$

حداقل عدد احاطه‌گری گراف $\overline{G}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma\left(\overline{G}\right) \geq \left[\frac{n}{\Delta+۱}\right] \Rightarrow \gamma\left(\overline{G}\right) \geq \left[\frac{۱۸}{۴+۱}\right] = ۴$$

پس با کم‌تر از ۴ رأس نمی‌توان گراف $\overline{G}$ را احاطه کرد.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این‌که مرتبه گراف برابر ۱۰و درجه هر رأس گراف برابر ۳ است، پس مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف نمی‌تواند کم‌تر از $\left[\frac{۱۰}{۳+۱}\right] = ۳$ عضو داشته باشد. رأس a در گرافG قادر به احاطه رأس‌های مجموعه $\{a, b, e, f\}$ است. اکنون باید حداقل دو رأس دیگر در این گراف انتخاب نمود که بتوانند ۶ رأس باقی‌مانده گراف را احاطه نمایند.

تنها حالت‌های ممکن برای انتخاب دو رأس دیگر، مجموعه‌های $\{h, i\}$، $\{h, e\}$ و $\{i, b\}$ است، بنابراین گراف G دارای سه مجموعه احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a است که عبارت‌اند از: $\{a, h, i\}$, $\{a, e, h\}$, $\{a, b, i\}$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

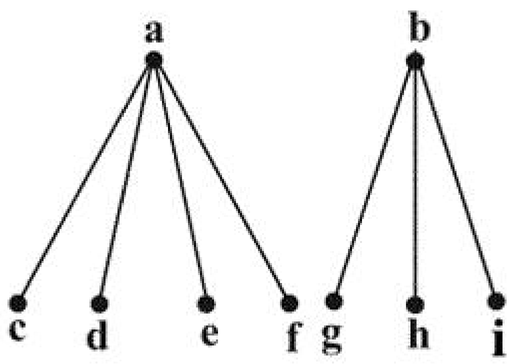
گراف G رأس تنها ندارد، پس رأسی در گراف $\overline{G}$ موجود نیست که با تمام رأس‌های آن گراف مجاور باشد و در نتیجه $\gamma(\overline{G}) > ۱$ است. از طرفی رأس a در گراف $\overline{G}$ تمام رئوس گراف به جز b و c را احاطه می‌کند. دو رأس b و c نیز در گراف $\overline{G}$ مجاورند، پس $\{a, b\}$ می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $\overline{G}$ باشد و در نتیجه $\gamma(\bar{G}) = ۲$ است.

سوال ۱۷

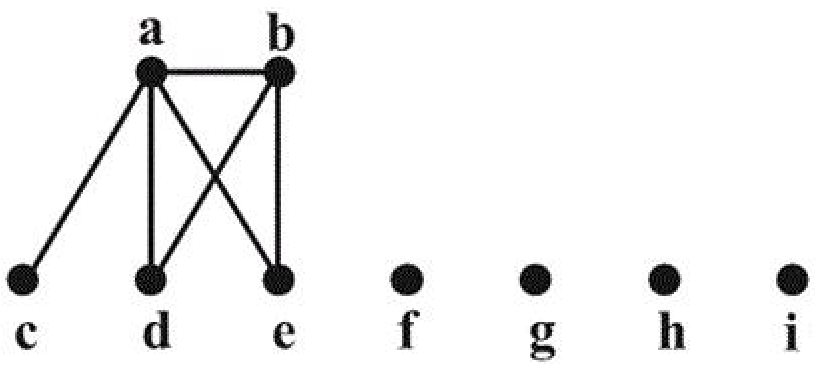
پاسخ: گزینه ۱

مجموعه همسایگی بسته رأس b دارای ۴ عضو است، پس deg(b) = ۳ می‌باشد.

برای اینکه بیشترین تعداد رأس ممکن توسط رئوس a و b احاطه شوند، این دو رأس نباید مجاور بوده و همچنین اشتراک مجموعه همسایگی‌های باز این دو رأس باید تهی باشد، یعنی هیچ دو رأسی همزمان با رئوس a و b مجاور نباشند. در این صورت مطابق شکل تمامی رئوس گراف توسط دو رأس a و b احاطه می‌شوند.



حال اگر دو رأس a و b مجاور بوده و $N_G(b) \subseteq N_G(a)$ باشد، مطابق شکل حداکثر ۴ رأس در این گراف موجود است که توسط رئوس a و b احاطه نمی‌شود.

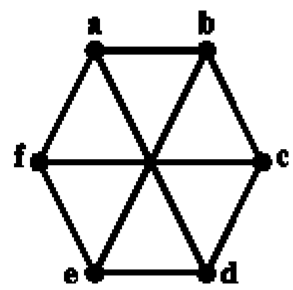


سوال ۱۸

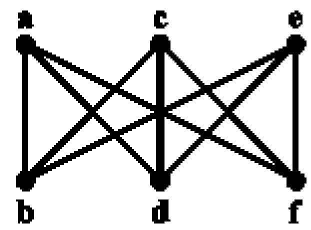
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

گراف به صورت شکل زیر است:



با درنظر گرفتن رئوس مجاور در این گراف، می‌توان نمودار گراف را مطابق شکل زیر نیز رسم کرد:



هر مجموعه دو عضوی که شامل یکی از سه رأس بالایی (e, c, a) و یکی از سه رأس پایینی (f, d, b) باشد، یک γ- مجموعه برای این گراف است که تعداد آنها برابر است با: $۳ \times ۳ = ۹$

به بیان دیگر هر دو رأس مجاور در این گراف، یک γ- مجموعه تشکیل می‌دهند که با توجه به داشتن ۹ یال در این گراف، ۹ مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیز وجود دارد.

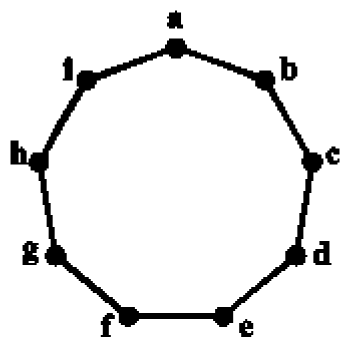
سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

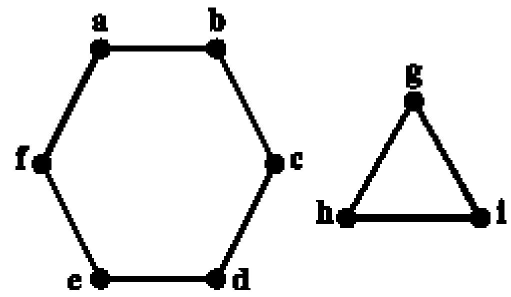
گزینه «۳»

حداقل عدد احاطه‌گری یک گرافم ۲- نتظم از مرتبه ۹، برابر ۳ است. سه گراف متمایز زیر، گراف‌های ۲- منتظم از مرتبه ۹ با عدد احاطه‌گری ۳ هستند و مجموعه $\{a, d, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف‌ها محسوب می‌شود:

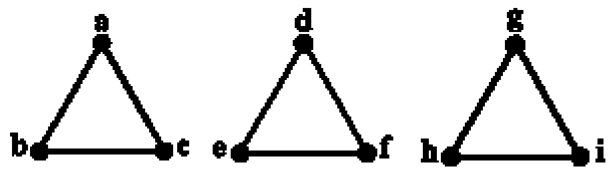
$G_۱$:



$G_۲$:



$G_۳$:



سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

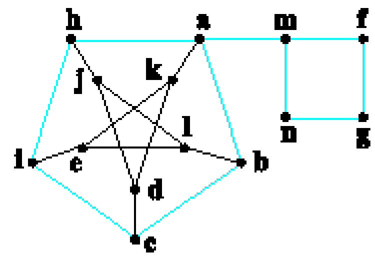
هر مجموعه احاطه‌گر این گراف باید حتماً شامل یکی از دو رأس a و b، یکی از دو رأس e و f و یکی از دو رأس i و j باشد. همچنین حداقل به یک رأس دیگر نیاز داریم که رئوس d، h و l را احاطه کند، پس حداقل ۴ رأس برای احاطه رئوس این گراف لازم است، یعنی $\gamma(G) = ۴$ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این گراف، تنها دو مجموعه $\{b, f, j, h\}$ و $\{b, e, j, h\}$ هستند.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ۲

مطابق شکل مجموعه $\{a, d, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است. مجموعه‌های سایر گزینه‌ها، مجموعه احاطه‌گر این گراف نیستند، زیرا داریم:



گزینه «۱»: هیچ یک از رأس‌های مجموعه $\{a, c, e, g\}$، قادر به احاطه رأس j نیستند.

گزینه «۳»: هیچ یک از رأس‌های مجموعه $\{a, b, d, e\}$، قادر به احاطه رأس‌های f، g و n نیستند.

گزینه «۴»: هیچ یک از رأس‌های مجموعه $\{a, d, e, f\}$، قادر به احاطه رأس n نیستند.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

در هر گراف r- منتظم، رابطه $rp = ۲q$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$۳p = ۲ \times ۱۵ \Rightarrow p = ۱۰$$

$$\left\lceil \frac{p}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳$$

بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۳ است.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

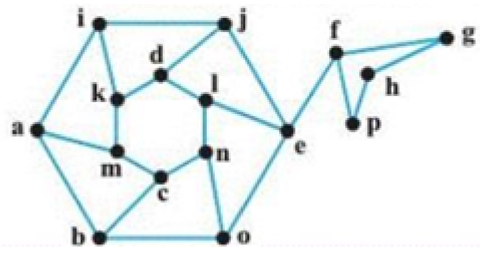
گزینه۳

گزینه «۱»: مجموعه $\{a, b, c, d, h\}$، مجموعه احاطه‌گر گراف نیست، زیرا رئوس e و f توسط هیچ‌یک از رئوس این مجموعه احاطه نمی‌شوند.

گزینه «۲»: مجموعه $\{b, c, e, d, g\}$، مجموعه احاطه‌گر گراف نیست، زیرا رئوس i و p توسط هیچ‌یک از رئوس این مجموعه احاطه نمی‌شوند.

گزینه «۳»: مجموعه $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر گراف است و با حذف هر کدام از اعضای این مجموعه، حداقل یکی از رئوس گراف قابل احاطه نیست، پس این مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

گزینه «۴»: مجموعه $\{a, c, e, d, g\}$، مجموعه احاطه‌گر گراف نیست، زیرا رأس p توسط هیچ‌یک از رئوس این مجموعه احاطه نمی‌شود.

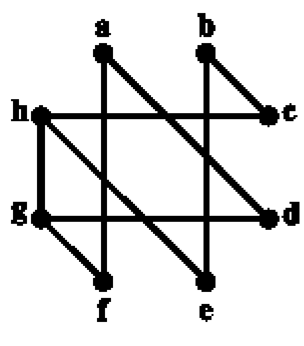


سوال ۲۴

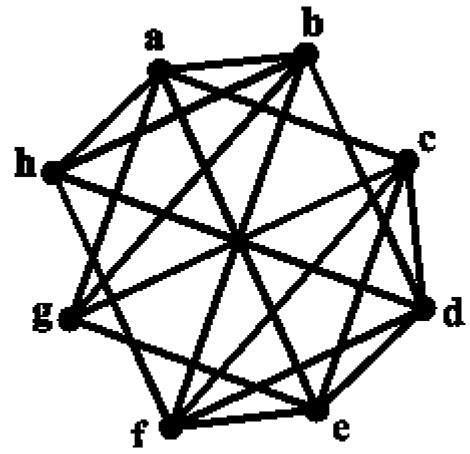
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

گراف به صورت شکل زیر است:



در نتیجه مکمل گراف G، یعنی گراف $\bar{G}$ مطابق شکل زیر است:



در گراف $\bar{G}$ رأسی وجود ندارد که با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری گراف $\bar{G}$ بزرگتر از ۱ است. از طرفی مجموعه $\{a, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس $\gamma(\bar{G}) = ۲$.

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چون عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۲ است، پس هیچ رأسی از درجه ۶ ندارد و در نتیجه بیش‌ترین درجه در چنین گرافی $\Delta = ۵$ است. چون گراف نمی‌تواند به تعداد فرد رأس از درجه فرد داشته باشد، کم‌ترین تعداد یال برای این گراف در صورتی ممکن است که درجه رئوس آن به صورت ۴، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵ و ۵ باشد که در این‌حالت داریم:

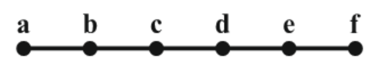
$$۲q = ۶ \times ۵ + ۴ = ۳۴ \Rightarrow q = ۱۷$$

سوال ۲۶

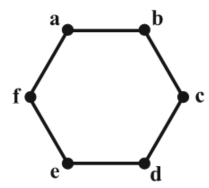
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

گراف $P_۶$ مطابق شکل تنها دارای یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یعنی مجموعه $\{b, e\}$ است.



گراف $C_۶$ مطابق شکل دارای ۳ مجموعه احاطه‌گر مینیمم $\{a, d\}$، $\{b, e\}$ و $\{c, f\}$ است.

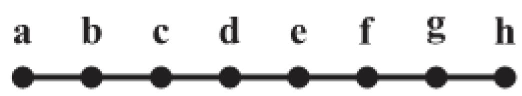


بنابراین اختلاف تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این دو گراف، برابر ۲ است.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

عدد احاطه‌گری گراف $P_۸$، برابر $۳ = \lceil \frac{۸}{۳} \rceil$ است.



مطابق شکل، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف $P_۸$ عبارت‌اند از:

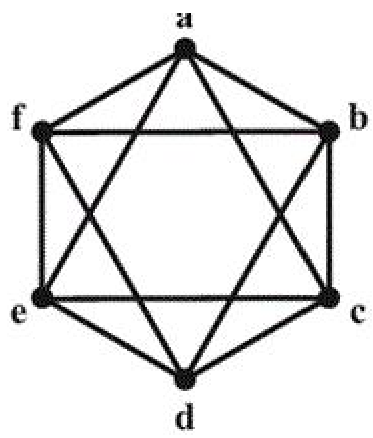
$$\{a, d, g\}\ ,\ \{b, d, g\}\ ,\ \{b, e, g\}\ ,\ \{b, e, h\}$$

دقت کنید که در هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف، یک رأس از میان a و b و یک رأس از میان g و h باید موجود باشد و بین هر دو رأس موجود در مجموعه احاطه‌گر مینیمم، حداکثر باید به اندازه دو رأس فاصله وجود داشته باشد.

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

مکمل یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶، گرافی ۱- منتظم از مرتبه ۶ است. چون تنها یک گراف ۱- منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد، پس گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶ نیز منحصر به فرد است.



چون هیچ رأسی در این گراف وجود ندارد که با تمامی رئوس دیگر مجاور باشد، پس عدد احاطه‌گری گراف بزرگ‌تر از یک است. از طرفی مجموعه $\{a, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است. به طور مشابه هر زیرمجموعه دو عضوی از رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. دقت کنید که این گراف نمی‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمالی با بیش از دو عضو داشته باشد (چون هر زیرمجموعه دو عضوی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است)، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال گراف برابر تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e, f\}$، یعنی برابر $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ است.

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

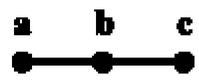
عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۳ است. در هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف، رأس c حتماً باید وجود داشته باشد، زیرا هیچ رأس دیگری قادر نیست هر دو رأس a و b را احاطه کند. همچنین از بین دو رأس e و f، یک رأس و از بین دو رأس g و h نیز یک رأس حتماً باید در مجموعه احاطه‌گر مینیمم موجود باشد، ولی در صورت انتخاب دو رأس e و g، رأس i احاطه نمی‌شود، بنابراین گراف تنها دارای سه مجموعه احاطه‌گر مینیمم $\{c, f, h\}$، $\{c, e, h\}$ و $\{c, f, g\}$ است.

سوال ۳۰

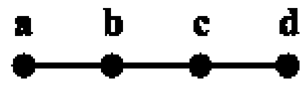
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

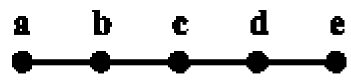
گزینه «۱»: $\gamma(P_۳) = ۱$ است ولی مطابق شکل مجموعه $\{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



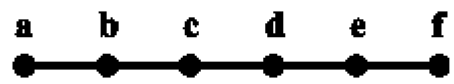
گزینه «۲»: $\gamma(P_۴) = ۲$ است. این گراف دارای ۴ مجموعه احاطه‌گر مینیمال $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ است که همگی احاطه‌گر مینیمم نیز هستند.



گزینه «۳»: $\gamma(P_۵) = ۲$ است ولی مطابق شکل مجموعه $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



گزینه «۴»: $\gamma(P_۶) = ۲$ است ولی مطابق شکل مجموعه $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۳ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

---

۱) در یک هتل، اتاق‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴، دو نفره و اتاق‌های ۱۰۵ و ۱۰۶، سه نفره هستند. تعداد راه‌های اقامت هشت نفر در اتاق‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴، چقدر بیشتر از تعداد راه‌های اقامت آنها در اتاق‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶ است؟

۱) ۱۷۵
۲) ۵۴۰
۳) ۱۲۸۰
۴) ۱۹۶۰

۲) به چند طریق می‌توان ۱۲ سیب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد به گونه‌ای که هر نفر حداقل یک سیب دریافت کرده و تعداد سیب‌های نفر چهارم، ۲ واحد بیشتر از نفر سوم باشد؟

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۵

۳) با ارقام عدد ۵۴۳۵۳۵۵۳ ، چند عدد هشت رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱) ۳۵
۲) ۵۶
۳) ۷۲
۴) ۸۴

۴) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \frac{8}{x_2} + x_3 = 13$ کدام است؟

۱) ۳۶
۲) ۳۹
۳) ۴۱
۴) ۴۸

۵) می‌خواهیم برای تدریس دبیران A، B، C و D برای ۴ زنگ در کلاس‌های الف، ب، ج و د در یک مدرسه برنامه‌ریزی کنیم به‌گونه‌ای که هر دبیر در هر کلاس و هر زنگ، دقیقاً یک بار تدریس داشته باشد. اگر برنامه کلاس الف و زنگ اول همه کلاس‌ها مطابق جدول زیر معلوم باشد، برنامه‌ریزی به چند طریق امکان‌پذیر است؟

زنگ / کلاس	۱	۲	۳	۴
الف	A	B	C	D
ب	C			
ج	D			
د	B			

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 35$ کدام است؟

۱) ۶۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۴۰

۷) اگر A مربع لاتین چرخشی ۴ × ۴ باشد، آنگاه چند مربع لاتین مانند B وجود دارد که با مربع A متعامد بوده و درایه سطر اول ستون اول آن برابر یک باشد؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

⑧ با ارقام ۱,۲,۳,۳,۳,۶,۷ ، چند عدد هفت رقمی می‌توان ساخت به طوری که بین ارقام زوج دقیقاً دو رقم فاصله وجود داشته باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۶۰
۳) ۳۶۰ ۴) ۴۰۰

⑨ به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به‌طوری که هر نفر حداقل، یک توپ داشته باشد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

⑩ تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۹۳

⑪ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_2 > 3$ باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۵

⑫ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت که فقط شامل ارقام ۱ و ۲ بوده و بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۲ ۳) ۷۰ ۴) ۸۶

⑬ نامعادله $x + y + z < 8$، چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

⑭ با جایگشت ارقام عدد ۱۵۰۱۲۳۵، چند عدد هفت رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۲۰
۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

⑮ اگر A یک مربع لاتین 3×3 باشد، آنگاه چند مربع لاتین 3×3 وجود دارد که با A متعامد بوده و از تعویض جای حداقل دو سطر مربع A حاصل شده باشند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

⑯ از مجموعه اعداد $\{5, 8, 11, \ldots, 65, 68, 71\}$ که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیر مجموعه حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم، لااقل دو عدد در این زیر مجموعه موجود است که جمع آنها، ۸۲ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

⑰ اگر هر یک از یال‌های گراف کامل K_{11} را با استفاده از ۶ رنگ موجود رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه بیشترین مقدار n برای اینکه مطمئن باشیم حداقل n یال همرنگ در این گراف وجود دارد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

⑱ چند عدد طبیعی n به‌طوری که $1 \le n \le 100$ وجود دارد که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۱۹) چند تابع مانند f از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{۱, ۲, ۳\}$ می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که $R_f = B$ باشد؟

۱) ۲۷
۲) ۳۶
۳) ۴۵
۴) ۵۴

۲۰) با ارقام ۱، ۲ و ۳، چند عدد n رقمی $(n \geq ۳)$ می‌توان نوشت به طوری‌که شامل هر سه رقم ۱، ۲ و ۳ باشد؟

۱) $۳^n - ۳$
۲) $۳^n - n$
۳) ۳^n
۴) $۳(۳^{n-۱} - ۲^n + ۱)$

۲۱) گراف G از مرتبه ۹ را که تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال آن یک‌عضوی است، در نظر بگیرید. یال‌های این گراف را حداکثر با چند رنگ مختلف می‌توانیم رنگ‌آمیزی کنیم به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل ۶ یال همرنگ در میان آن‌ها وجود دارد؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۲۲) چند تابع پوشا از مجموعه $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ به مجموعه $R = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ می‌توان تعریف کرد که شامل زوج مرتب‌های $(۱, ۱)$ و $(۲, ۲)$ باشد؟

۱) ۱۱۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۳۵
۴) ۱۵۰

۲۳) ۸۵ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۷ شاخه گل قرار گرفته است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۱

۲۴) چند عضو از مجموعه $S = \{۵۰, ۵۱, ۵۲, \ldots, ۸۰\}$ نسبت به ۶ اول هستند؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۲۵) در چند جایگشت از حروف کلمه TEHRAN، هیچ‌کدام از حروف T و N سرجای خود قرار ندارند؟

۱) ۶۹۶
۲) ۷۲۰
۳) ۵۰۴
۴) ۵۲۰

۲۶) در یک برنامه تلویزیونی، ۸ نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و مسابقه تنها یک برنده خواهد داشت. اگر تعداد جوایز این برنامه برابر ۴ باشد، آنگاه این جوایز را به چند طریق می‌توان بین شرکت‌کنندگان تقسیم کرد به‌گونه‌ای که هیچ‌کس بیش از یک جایزه دریافت نکند و برنده مسابقه حتماً یک جایزه دریافت کرده باشد؟ (جوایز با هم متفاوت هستند.)

۱) ۸۴۰
۲) ۱۱۲۰
۳) ۱۲۶۰
۴) ۱۶۸۰

۲۷) مستطیلی با طول و عرض ۱۸ و ۱۲ واحد مفروض است. حداقل چند نقطه درون این مستطیل انتخاب کنیم تا در بین آن‌ها حداقل سه نقطه موجود باشد که فاصله آن‌ها دوبه‌دو از یکدیگر کوچک‌تر از $\sqrt{۱۸}$ باشد؟

۱) ۲۵
۲) ۴۹
۳) ۵۵
۴) ۷۳

۲۸) چند عضو از مجموعه $A = \{1,2,3,\dots,200\}$ بر هیچ‌یک از اعداد ۵ و ۶ بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۲۷
۲) ۱۳۰
۳) ۱۳۳
۴) ۱۳۶

۲۹) درون مکعب مستطیلی به ابعاد ۲، ۳ و ۴، حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم فاصله حداقل دو نقطه از آنها کم‌تر از $\sqrt{3}$ است؟

۱) ۲۵
۲) ۳۷
۳) ۴۹
۴) ۱۳

۳۰) به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ۴ مداد متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد به شرط آن‌که به هر فرد، هم خودکار و هم مداد برسد؟

۱) ۲۱۶
۲) ۲۴۰
۳) ۲۷۰
۴) ۲۸۸

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۳ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه«۴»

اگر تعداد راه‌های اقامت این افراد در اتاق‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴ را با n_1 و تعداد راه‌های اقامت این افراد در اتاق‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶ را با n_2 نمایش دهیم، آنگاه طبق رابطه جایگشت با تکرار داریم:

$$n_1 = \frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{8\times 7!}{8\times 2!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$n_2 = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times (4\times 3)\times 2}{6\times (6\times 2)}$$

$$= 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 560$$

$$n_1 - n_2 = 2520 - 560 = 1960$$

تذکر: دقت کنید که اتاق‌ها از یکدیگر متمایزند.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه«۱»

اگر تعداد سیب‌های این ۴ نفر را به ترتیب با مقادیر x_1، x_2، x_3 و x_4نمایش دهیم، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

$$\xrightarrow{x_4 = x_3 + 2} x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

با توجه به اینکه x_3 دارای ضریبی غیر از یک است، تعداد جواب‌های مسئله را با توجه به مقادیر x_3 به‌دست می‌آوریم. با توجه به شرط طبیعی بودن جواب‌ها $1 \le x_3 \le 4$ است و داریم:

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{8-1}{2-1} = 7$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{6-1}{2-1} = 5$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{4-1}{2-1} = 3$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{2-1}{2-1} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب ها} = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

رقم ۴ تنها رقم زوج در این عدد هشت رقمی است، پس لزوماً ۴ در رقم یکان قرار می‌گیرد.

رقم ۳، سه بار و رقم ۵، چهار بار در این عدد تکرار شده است، پس با توجه به رابطه جایگشت با تکرار تعداد اعداد هشت رقمی زوج قابل نوشتن با ارقام این عدد برابر است با:

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای به دست آوردن جواب‌های صحیح معادله، لازم است $\frac{۸}{x_۲}$ عددی صحیح باشد، پس ۴ حالت زیر امکان‌پذیر است:

$x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ + ۸ + x_۳ = ۱۳ \Rightarrow x_۱ + x_۳ = ۵$

$\Rightarrow |S_۱| = \binom{۵+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۶}{۱} = ۶$

$x_۲ = ۲ \Rightarrow x_۱ + ۴ + x_۳ = ۱۳ \Rightarrow x_۱ + x_۳ = ۹$

$\Rightarrow |S_۲| = \binom{۹+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۰}{۱} = ۱۰$

$x_۲ = ۴ \Rightarrow x_۱ + ۲ + x_۳ = ۱۳ \Rightarrow x_۱ + x_۳ = ۱۱$

$\Rightarrow |S_۳| = \binom{۱۱+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۲}{۱} = ۱۲$

$x_۲ = ۸ \Rightarrow x_۱ + ۱ + x_۳ = ۱۳ \Rightarrow x_۱ + x_۳ = ۱۲$

$\Rightarrow |S_۳| = \binom{۱۲+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۳}{۱} = ۱۳$

بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله برابر است با:

$|S| = ۶ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۳ = ۴۱$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

پاسخ این سؤال معادل یافتن تعداد مربع‌های لاتینی از مرتبه ۴ است که درایه‌های سطر اول و ستون اول آن پر شده باشد. حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

A	B	C	D
C	A	D	B
D	C	B	A
B	D	A	C

A	B	C	D
C	D	A	B
D	A	B	C
B	C	D	D

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A	B	C	D
C	D	B	A
D	C	A	B
B	A	D	C

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این‌که $۷ \times ۵ = ۳۵$ است، پس حالت‌های ممکن برای جواب‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{۷-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{۵-۱}{۴-۱} = \binom{۴}{۳} = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{۵-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶ \\ y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{۷-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = ۲۰ \end{cases}$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با:

$$۱۵ \times ۴ + ۶ \times ۲۰ = ۶۰ + ۱۲۰ = ۱۸۰$$

تذکر: واضح است که اگر ۳۵ را به‌صورت ۳۵×۱ بنویسیم، معادلات $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۱$ فاقد جواب طبیعی هستند.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ به‌صورت مقابل است: A=

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، در مربع حاصل از ترکیب آنها، هیچ عدد دو رقمی تکراری‌ای وجود ندارد. درایه سطر اول ستون اول مربع B برابر یک است، بنابراین برای حفظ متعامد بودن A و B، اعداد روی قطر اصلی مربع B نمی‌توانند ۱ باشند. از طرفی در هر سطر و ستون یک مربع لاتین، عدد تکراری وجود ندارد. بنابراین اعداد سطر اول و ستون اول، مربع لاتین B نیز نمی‌توانند ۱ باشند. بنابراین چهار عدد ۱ تنها به یکی از دو حالت زیر می‌توانند در مربع لاتین B قرار بگیرند. اما در حالت $B_۱$، درایه‌های مشخص شده با عدد ۱ در سطر سوم و چهارم و در حالت $B_۲$، درایه‌های مشخص شده با عدد ۱ در سطرهای دوم و سوم در مربع A یکسان هستند و در نتیجه مربع حاصل از ترکیب A و B غیر متعامد می‌شود. پس هیچ مربع لاتینی با شرایط گفته شده وجود ندارد.

B =

۱	×	×	×
×	×		
×		×	
×			×

$\rightarrow B_۱ =$

۱	×	×	×
×	×		۱
×	۱	×	
×		۱	×

$B_۲ =$

۱	×	×	×
×	×	۱	
×		×	۱
×	۱		×

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

$\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}\ \overline{e}\ \overline{f}\ \overline{g}$

اگر هفت جایگاه در نظر گرفته و آنها را مطابق شکل فوق نام‌گذاری کنیم، ارقام ۲ و ۶ می‌توانند در یکی از جایگاه‌های (a,d) ، (b,e) ، (c,f) و (d,g) قرار گیرند، پس ۴ حالت وجود دارد. همچنین برای جابه‌جایی دو رقم ۲و۶ نیز ۲ حالت وجود دارد. حال باید جایگشت ارقام باقی مانده یعنی ۱,۳,۳,۳,۷ را محاسبه کنیم. چون رقم ۳، سه بار تکرار شده است، پس تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{5!}{3!} = 20$ است و در نتیجه طبق اصل ضرب، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$4 \times 2 \times 20 = 160$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

تعداد راه‌های توزیع ۱۱ توپ یکسان میان ۵ نفر به گونه‌ای که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد، برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ است که تعداد این دسته از جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این که $2x_2$ و ۲۰، اعدادی زوج هستند، پس $x_1 + x_3$ نیز باید عددی زوج باشد. بنابراین x_1 و x_3 یا هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند و در نتیجه داریم:

حالت اول: $x_1 = 2k_1 \ , \ x_3 = 2k_3$

$$2k_1 + 2x_2 + 2k_3 = 20 \Rightarrow k_1 + x_2 + k_3 = 10$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{10-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

حالت دوم: $x_1 = 2k_1 - 1 \ , \ x_3 = 2k_3 - 1$

$$2k_1 + 2x_2 + 2k_3 = 22 \Rightarrow k_1 + x_2 + k_3 = 11$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

در نتیجه تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $36 + 45 = 81$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$

$x_2 > 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \Rightarrow x_2 = y_2 + 4$

اگر $x_3 = y_3$ و $x_4 = y_4$ فرض شود، آنگاه تعداد جواب‌های معادله با شرایط داده شده برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$(y_1 + 2) + (y_2 + 4) + y_3 + y_4 = 12$

$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$

تعداد جواب صحیح و نامنفی= $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) عدد مورد نظر شامل هفت رقم ۱ و یک رقم ۲ باشد:

$n_1 = \frac{8!}{7!1!} = 8$

ب) عدد مورد نظر شامل چهار رقم ۱ و چهار رقم ۲ باشد:

$n_2 = \frac{8!}{4!4!} = 70$

پ) عدد مورد نظر شامل یک رقم ۱ و هفت رقم ۲ باشد:

$n_3 = \frac{8!}{1!7!} = 8$

بنابراین کل تعداد اعداد مورد نظر برابر است با

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 86$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون دنبال جواب‌های طبیعی هستیم، پس دو نامعادله $x+y+z<8$ و $x+y+z\le 7$ معادل یکدیگرند. برای حل نامعادله $x+y+z\le 7$، کافی است متغیری مانند t به آن اضافه کرده و نامعادله را به صورت معادله $x+y+z+t=7$ درآوریم که متغیرهای x، y و z در آن باید عدد طبیعی باشند. در نتیجه داریم:

$x = x_1 + 1 \quad , \quad y = y_1 + 1 \quad , \quad z = z_1 + 1$

$x+y+z+t = 7 \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 + t = 4$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $= \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اعداد مورد نظر را با توجه به رقم یکان عدد به دو حالت زیر می‌توان تفکیک کرد:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد. در این حالت شش رقم باقی‌مانده شامل دو رقم ۱ و دو رقم ۵ است:

تعداد اعداد $= \frac{6!}{2!2!} = \frac{720}{4} = 180$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد. در این حالت صفر نمی تواند اولین رقم سمت چپ باشد و در میان ارقام باقی‌مانده، دو رقم ۱ وجود دارد:

تعداد اعداد $= \frac{5\times 5!}{2!} = \frac{5\times 120}{2} = 300$

بنابراین تعداد کل اعداد هفت رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام داده شده برابر است با:

$180 + 300 = 480$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

مربع لاتین ۳×۳ با مربعی که از تعویض سطرهای آن حاصل می‌شود، متعامد خواهد بود هرگاه یکی از سطرها ثابت مانده و جای دو سطر دیگر با هم عوض شود. بنابراین ۳ مربع لاتین متعامد با مربع لاتین A و با شرایط گفته شده وجود دارد.

به عنوان مثال داریم:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{تعویض سطر دوم و سوم}} B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

از ترکیب این دو مربع، مربع زیر حاصل می‌شود که در آن هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد، پس A و B متعامد هستند.

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

فرض کنید مجموعه $A = \{۵, ۸, ۱۱, \ldots, ۶۵, ۶۸, ۷۱\}$ به ۱۳ زیرمجموعه به‌صورت زیر افراز شده باشد که مجموع هر ۲ عضو در زیرمجموعه‌های ۲ عضوی برابر ۸۲ است:

$$\{۱۱, ۷۱\}, \{۱۴, ۶۸\}, \{۱۷, ۶۵\}, \ldots, \{۳۸, ۴۴\}, \{۵\}, \{۸\}, \{۴۱\}$$

حال طبق اصل لانه کبوتری اگر یک زیر مجموعه ۱۴ عضوی از اعضای مجموعه A انتخاب شود، آنگاه حداقل دو عضو آن به یکی از زیر مجموعه‌های افراز فوق تعلق دارند و در نتیجه مجموع آنها برابر ۸۲ است.

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تعداد یال‌های گراف کامل $K_{۱۱}$ برابر است با:

$$q(K_{۱۱}) = \frac{۱۱ \times ۱۰}{۲} = ۵۵$$

با توجه به اینکه $۹ = \left[\frac{۵۵}{۶}\right]$، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۱۰ یال در این گراف وجود دارد که همرنگ باشند.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که اعضای آنها به‌ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند، برابر است با:

$$|A-(B\cup C)| = |A| - |A\cap(B\cup C)|$$

$$= |A| - (|A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|)$$

$$= |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

به طریق مشابه می‌توان تعداد اعدادی که فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش‌پذیر هستند را به‌دست آورد، بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند، برابر است با:

$$|A| + |B| + |C| - ۲(|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + ۳|A\cap B\cap C|$$

حال مقدار هر یک از عبارت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$|A| = \left[\frac{۱۰۰}{۲}\right] = ۵۰ \text{ و } |B| = \left[\frac{۱۰۰}{۳}\right] = ۳۳ \text{ و } |C| = \left[\frac{۱۰۰}{۵}\right] = ۲۰$$

$$|A\cap B| = \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] = ۱۶ \text{ و } |A\cap C| = \left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right] = ۱۰$$

$$|B\cap C| = \left[\frac{۱۰۰}{۱۵}\right] = ۶ \text{ و } |A\cap B\cap C| = \left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right] = ۳$$

در نتیجه تعداد اعضای مجموعه مورد نظر برابر است با:

$$(۵۰+۳۳+۲۰) - ۲(۱۶+۱۰+۶) + ۳\times ۳ = ۱۰۳ - ۶۴ + ۹ = ۴۸$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر S مجموعه توابع f از A به B و $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ توابعی از A به B باشند که برد آنها به‌ترتیب فاقد ۱، ۲ و ۳ هستند، آنگاه داریم:

$$|S| = ۳^۴ = ۸۱$$

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۴ = ۱۶$$

$$|A_۱\cap A_۲| = |A_۱\cap A_۳| = |A_۲\cap A_۳| = ۱^۴ = ۱$$

$$|A_۱\cap A_۲\cap A_۳| = ۰$$

$$|A_۱\cup A_۲\cup A_۳| = ۳\times ۱۶ - ۳\times ۱ + ۰ = ۴۵$$

تعداد توابعی که $R_f = B$ باشد، معادل تعداد اعضای مجموعه $|\bar{A}_۱\cap \bar{A}_۲\cap \bar{A}_۳|$ است، بنابراین داریم:

$$|\bar{A}_۱\cap \bar{A}_۲\cap \bar{A}_۳| = |\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}| = |S| - |A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$$

$$= ۸۱ - ۴۵ = ۳۶$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید S مجموعه تمام اعداد n رقمی با ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد. داریم:

اعداد n رقمی با ارقام ۲ و ۳ : A

اعداد n رقمی با ارقام ۱ و ۳ : B

اعداد n رقمی با ارقام ۱ و۲ : C

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= ۳^n - (۲^n + ۲^n + ۲^n - ۱ - ۱ - ۱ + ۰) = ۳^n - ۳ \times ۲^n + ۳$$

$$= ۳\ (۳^{n-۱} - ۲^n + ۱)$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با توجه به این‌که تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف، یک عضوی است، پس هر رأس گرافی به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر بوده و با تمام رأس‌های دیگر گراف مجاور است. بنابراینG گراف کامل مرتبه ۹ و دارای $۳۶ = \frac{۹\times۸}{۲}$ یال است. چون $۵ \times ۸ > ۳۶$، در صورت استفاده از ۸ رنگ مختلف، ممکن است بیشتر از ۵ یال همرنگ وجود نداشته باشد، ولی چون $۵ \times ۷ < ۳۶$، طبق اصل لانه کبوتری با استفاده از ۷ رنگ مختلف، حداقل ۶ یال همرنگ در این گراف وجود دارد.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

هر کدام از این توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,\bigcirc), (۴,\bigcirc), (۵,\bigcirc), (۶,\bigcirc)\}$$

اگر مجموعه این دسته از توابع را با S و زیر مجموعه‌هایی از S که برد آنها به‌ترتیب فاقد ۳ و فاقد ۴ باشد را با A و B نمایش دهیم، داریم:

$$|S| = ۴^۴ = ۲۵۶$$

$$|A| = |B| = ۳^۴ = ۸۱$$

$$|A \cap B| = ۲^۴ = ۱۶$$

در این صورت مجموعه توابع پوشا معادل مجموعه $\bar{A} \cap \bar{B}$ است. داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= ۲۵۶ - (۸۱ + ۸۱ - ۱۶) = ۲۵۶ - ۱۴۶ = ۱۱۰$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است. بنابراین داریم: $k+1=7 \Rightarrow k=6$

$$n=\left[\frac{85}{6}\right]=14$$

بنابراین اگر ۸۵ شاخه گل را حداکثر در ۱۴ گلدان قرار دهیم، آنگاه با توجه به رابطه $6\times14<85$، گلدانی وجود دارد که در آن حداقل ۷ شاخه گل قرار گرفته است.

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

عددی نسبت به ۶ اول است که نه مضرب ۲ باشد و نه مضرب ۳. اگر مجموعه اعدادی که مضرب ۲ هستند را با A و مجموعه اعدادی که مضرب ۳ هستند را با B نمایش دهیم $(A,B\subseteq S)$، آنگاه داریم:

$$|A|=\left[\frac{80}{2}\right]-\left[\frac{49}{2}\right]=40-24=16$$

$$|B|=\left[\frac{80}{3}\right]-\left[\frac{49}{3}\right]=26-16=10$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{80}{6}\right]-\left[\frac{49}{6}\right]=13-8=5$$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=16+10-5=21$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=31-21=10$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

اگر A و B مجموعه جایگشت‌هایی از حروف کلمه TEHRAN باشند که در آنها به‌ترتیب T و N سر جای خود قرار دارند، داریم:

$$\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=\left|\overline{A\cup B}\right|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

$$\left|\bar{A}\cap\bar{B}\right|=6!-5!-5!+4!=504$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا یکی از جوایز را به دلخواه انتخاب کرده و به برنده مسابقه می‌دهیم که این کار به ۴ طریق امکان‌پذیر است. سپس جوایز باقی‌مانده را بین سایر افراد توزیع می‌کنیم که اولین جایزه به ۷ طریق و جوایز بعدی به ۶ و ۵ طریق قابل توزیع هستند. در نتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

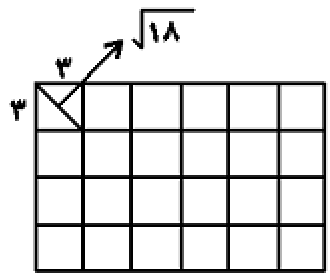
$$4\times7\times6\times5=840$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

مطابق شکل روی هر ضلع مستطیل ۳ واحد، ۳ واحد جدا می‌کنیم. با وصل کردن نقاط به‌طور عمودی و افقی، $۲۴ = ۴ \times ۶$ مربع به طول ضلع ۳ ایجاد می‌شود که فاصله هر دو نقطه واقع در یک مربع از یکدیگر، کوچک‌تر از طول قطر مربع یعنی $\sqrt{۱۸}$ است. حال طبق اصل لانه کبوتری اگر $۴۹ = ۱ + ۲۴ \times ۲$ نقطه داخل این مستطیل انتخاب کنیم، آن‌گاه حداقل ۳ نقطه از میان این نقاط به یکی از این مربع‌ها تعلق داشته و فاصله آن‌ها دوبه‌دو از یکدیگر، کمتر از $\sqrt{۱۸}$ است.



سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه A باشند که اعضای آنها به‌ترتیب بر ۵ و ۶ بخش‌پذیر هستند. در این‌صورت داریم:

$$|A_۱| = \left[\frac{۲۰۰}{۵}\right] = ۴۰$$

$$|A_۲| = \left[\frac{۲۰۰}{۶}\right] = ۳۳$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \left[\frac{۲۰۰}{۳۰}\right] = ۶$$

$$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| = ۴۰ + ۳۳ - ۶ = ۶۷$$

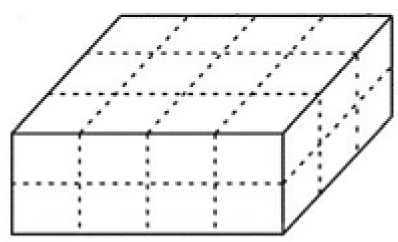
اعضایی از مجموعه A که بر هیچ‌یک از اعداد ۵ و ۶ بخش‌پذیر نیستند، معادل مجموعه $\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲$ است. داریم:

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲| = |\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |A| - |A_۱ \cup A_۲| = ۲۰۰ - ۶۷ = ۱۳۳$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

باید این مکعب را به مکعب‌های $۱ \times ۱ \times ۱$ تفکیک کرد:



در این شکل ۲۴ مکعب به ضلع ۱ داریم که بیش‌ترین فاصله نقطه‌ها در هر مکعب، برابر قطر آن یعنی $\sqrt{۳}$ است، بنابراین اگر ۲۵نقطه درون این مکعب انتخاب کنیم، مطمئن هستیم که فاصله حداقل دو نقطه از میان آنها کم‌تر از $\sqrt{۳}$ است.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

تعداد حالت‌های توزیع ۵ خودکار یکسان بین سه نفر به‌طوری که به هر کدام حداقل یک خودکار برسد، برابر جواب‌های طبیعی معادله $x + y + z = ۵$ است که برابر است با:

$$\binom{۵ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

تعداد حالت‌های توزیع ۴ مداد متمایز بین سه نفر که به هر کدام حداقل یک مداد برسد، برابر تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است که برابر است با:

$$۳^۴ - ۳ \times ۲^۴ + ۳ \times ۱ = ۳۶$$

پس طبق اصل ضرب، تعداد جواب‌های سوال برابر $۲۱۶ = ۳۶ \times ۶$ است.