مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۱ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

① فرض کنید a عددی گنگ باشد.کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

۱) دست کم یکی از اعداد a^2 و a^4-1 گنگ است.
۲) دست کم یکی از اعداد a^3 و a^6+1 گنگ است.
۳) دست کم یکی از اعداد a^2 و a^4 گویا است.
۴) حداکثر یکی از اعداد a^2 و a^3 گویا است.

② اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، کدام‌یک از گزاره‌های زیر با گزاره $a<b$ هم‌ارز <u>نیست</u>؟

۱) $a^2<b^2$
۲) $a^3<b^3$
۳) $\sqrt{a}<b$
۴) $|a|<b$

③ در کدام گزینه، گزاره‌های p و q هم‌ارز <u>نیستند</u>؟

۱) p : نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. q : فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.
۲) p : نقطه M روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد. q : فاصله نقطه M از دو ضلع Ox و Oy یکسان است.
۳) p : فاصله نقاط A و B از خط d یکسان است. q: خط d از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.
۴) p : نقطه A روی دایره $C(O,R)$ قرار دارد. q: طول پاره‌خط OA برابر R است.

④ اگر a و b دو عدد گویا و c و d دو عدد گنگ باشند، چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست هستند؟ $(b\neq 0)$

الف) $a(b+c)\in R-Q$ ب) $\frac{b}{c}\in Q$ پ) $c^d\in R-Q$

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

⑤ چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر n و m دو عدد صحیح متوالی باشند، عدد $mn+m$ مربع کامل است.

ب) اگر n و m دو عدد زوج متوالی باشند، عدد $mn+1$ مربع کامل است.

پ) اگر n و m دو عدد فرد متوالی باشند، عدد m^2+m+n مربع کامل است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

⑥ اگر a عددی حقیقی و ناصفر باشد، گزارهٔ $(a+\frac{1}{a})(2a+1)\geq 2$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

۱) $a^3+a^2-2a+1\geq 0$
۲) $2a^4+a^3+a\geq 0$
۳) $a^4+a^3-2a^2+a\geq 0$
۴) $a^4-a^3+2a^2\geq 0$

⑦ گزاره «اگر n عدد صحیح و n^2 مضرب k باشد، آن‌گاه n مضرب k است.» به ازای کدام مقدار k لزوماً درست <u>نیست</u>؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

⑧ به ازای کدام مقدار a، دو عدد $5n+3$ و $an+11$ همواره نسبت به هم اول هستند؟ $(n\in Z)$

۱) ۱۶
۲) ۱۷
۳) ۱۸
۴) ۱۹

۹) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰) اگر a عددی طبیعی باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a، عدد $a^2 + 2$ بر عدد $a + 2$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۱) اگر a، b، c و d اعدادی صحیح و $ad = bc$ باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱) $c^2|ad$ ۲) $a = c$ و $b = d$ ۳) $a|bc^2$ ۴) $bc^2|ad$

۱۲) چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع $y = \frac{8+5|x|}{|x|}$ وجود دارد به گونه‌ای که $y > x$ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۵

۱۳) اعداد صحیح a_1، a_2 و a_3 سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی با قدرنسبت غیرصفر هستند. اگر $a_1|a_2$ و $a_2|a_3$ باشد، مجموع این سه جمله چند برابر جمله اول است؟ $(a_1, a_2, a_3 \neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۱۴) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۹ به‌ترتیب ۵ و ۴ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۶۳ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳
۳) ۴۰ ۴) ۴۶

۱۵) چند عدد طبیعی a وجود دارد به طوری که دو عدد $3n + a$ و $7n + 3$ به ازای هر $n \in N$، نسبت به هم اول باشند؟

۱) هیچ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۶) اگر $7|a + 3b$ و $7 \nmid b$، به ازای چند مقدار k از مجموعه $A = \{x|x \in Z\ ,\ -3 \leq x \leq 7\}$، رابطه $7|2a + kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a, b \in Z)$

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۷) به ازای چند عدد صحیح متمایز a، هر دو عدد $5m + 4$ و $6m + 5$ ممکن است بر عدد a بخش‌پذیر باشند؟ $(m \in Z)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸) چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم ۹۶ بر هر یک از آنها، برابر ۶ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۹) چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $8y - x^2 - 4x - 11 = 0$ قرار دارد؟

۱) هیچ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) بی شمار

۲۰) دو عدد $a^۲ + a + ۳$ و $a - ۱$ نسبت به هم اول‌اند. کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $a = ۵k + ۱$
۲) $a = ۵k$
۳) $a \neq ۵k$
۴) $a \neq ۵k + ۱$

۲۱) شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است و با پاسخ دادن به سؤالات ۷ و ۱۲ امتیازی، مجموعاً ۱۷۵ امتیاز کسب نموده است. اگر پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل داشته باشد و یا فاقد امتیاز باشد، این شخص به چند طریق توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۲) اگر عدد طبیعی پنج رقمی $\overline{a۱۱۱a}$ مضرب ۱۱ باشد، آنگاه چند عدد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۹ به‌صورت $\overline{babb}$ وجود دارد؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۳) باقی‌مانده تقسیم عدد $۵^{۴۰} - ۸^{۴۰}$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۹

۲۴) بزرگترین عدد سه رقمی x که در معادله $۲۳x \overset{۵۲}{\equiv} ۲۲$ صدق می‌کند، چقدر است؟

۱) ۹۹۸
۲) ۹۹۶
۳) ۹۸۸
۴) ۹۸۶

۲۵) اگر $۷۵x \overset{۱۲}{\equiv} ۵۴$، آنگاه عدد x به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۸ می‌تواند تعلق داشته باشد؟

۱) [۳]
۲) [۴]
۳) [۵]
۴) [۶]

۲۶) معادله $۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۱$ در مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۷) سه عدد a، ۱۴۷ و ۲۳۸ به یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m $(m > ۱)$ تعلق دارند. به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی a، تعداد دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه m، کم‌ترین مقدار ممکن است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۲۸) از رابطه هم‌نهشتی $۹۶a \overset{۲۸}{\equiv} ۲۶۴b$، کدام نتیجه‌گیری زیر نادرست است؟

۱) $۵۰a \overset{۷}{\equiv} ۲۹b$
۲) $۲۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۱۲b$
۳) $a - b \overset{۷}{\equiv} ۰$
۴) $۱۲a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۳b$

۲۹) به چند طریق می‌توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱) ۲۲
۲) ۲۳
۳) ۲۴
۴) ۲۵

۳۰) به چند طریق می‌توان ۲۱۸ هزار تومان کتاب با بن‌های کتاب ۵ هزار تومانی و ۱۲ هزارتومانی خرید؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۱ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

مثال نقض گزینه «۱»: $a = \sqrt{۲}$

مثال نقض گزینه‌های «۲» و «۳»: $a = \sqrt[۳]{۲}$

در گزینه «۴» بنا به برهان خلف، اگر اعداد $a^۲$ و $a^۳$ هر دو گویا باشند، آنگاه $a = \frac{a^۳}{a^۲}$ نیز عددی گویا می‌شود که خلاف فرض است.

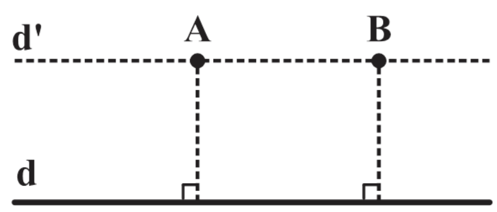
سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، گزاره $a < b$ با گزاره $\sqrt{a} < b$ هم‌ارز نمی‌باشد. چون ریشه دوم اعداد بین صفر و یک بزرگ‌تر از خود عدد می‌باشند. به عنوان مثال اگر $a = \frac{۱}{۴}$ و $b = \frac{۱}{۳}$ باشد، گزاره $a < b$ $(\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۳})$ درست است ولی گزاره $\sqrt{a} < b$ $(\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۳})$ نادرست است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳



مطابق شکل، نقاط A و B روی خط 'd موازی با خط d قرار دارند و در نتیجه از خط d به یک فاصله‌اند. ولی بدیهی است که خط d از وسط پاره‌خط AB عبور نمی‌کند. بنابراین گزاره‌های p و q در گزینه «۳» هم‌ارز نیستند.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

گزاره «الف» در حالت کلی درست نیست، چون اگر $a = ۰$ باشد، آنگاه $a(b+c) = ۰$ و در نتیجه گویا است.

گزاره «ب» نادرست است، چون وارون عدد گنگ c، عددی گنگ است و در نتیجه حاصل‌ضرب آن در عدد گویای غیر صفر b، عددی گنگ است، یعنی $\frac{b}{c} = b \times \frac{1}{c}$ به مجموعه اعداد گویا تعلق ندارد.

گزاره «پ» در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال نقض داریم:

$$\left.\begin{array}{l} c = ۲^{\frac{1}{\sqrt{۲}}} \\ d = \sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow c^d = \left(۲^{\frac{1}{\sqrt{۲}}}\right)^{\sqrt{۲}} = ۲^{\frac{1}{\sqrt{۲}} \times \sqrt{۲}} = ۲^۱ \in Q$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

درستی گزاره «الف» با فرض $m = ۲$ و $n = ۳$، رد می‌شود.

(این گزاره با فرض $m > n$ درست است.)

درستی گزاره «پ»، با فرض $m = ۳$ و $n = ۱$ رد می‌شود.

گزاره «ب» درست است. زیرا فرض کنید $m = ۲k$ و $n = ۲k + ۲$، در این صورت $mn + ۱ = ۲k(۲k+۲) + ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = (۲k+۱)^۲$ که مربع کامل است.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$(a + \frac{1}{a})(۲a + ۱) \geq ۲ \Leftrightarrow ۲a^۲ + a + ۲ + \frac{1}{a} \geq ۲$$
$$\Leftrightarrow ۲a^۲ + a + \frac{1}{a} \geq ۰ \overset{\times a^۲}{\Leftrightarrow} ۲a^۴ + a^۳ + a \geq ۰$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر k عددی اول باشد یا در تجزیه آن به عوامل اول، هیچ عاملی توانی بزرگ تر از یک نداشته باشد، آن‌گاه این گزاره درست است. با توجه به اینکه $۴ = ۲^۲$ می‌باشد، گزاره مورد نظر می‌تواند دارای مثال نقض باشد، مانند $n = ۲$ که $۲^۲$ مضرب ۴ است ولی ۲ مضرب ۴ نیست.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید $d = (5n+3, an+11)$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,5n+3 \xrightarrow{\times a} d\,|\,5an+3a \\ d\,|\,an+11 \xrightarrow{\times 5} d\,|\,5an+55 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\,|\,3a+55$$

برای این که $d = 1$ باشد، $3a - 55$ لزوماً باید برابر با ۱ یا (۱-) شود. داریم:

$$3a - 55 = 1 \Rightarrow a = \frac{56}{3} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$3a - 55 = -1 \Rightarrow a = 18$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

بر طبق الگوریتم تقسیم (۱) $b > 37$ و $a = 21b + 37$ است.

$$100 \le 21b + 37 \le 999 \Rightarrow 3 \le b \le 45 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 38 \le b \le 45$$

$$21 = 5k_1 + 1 \quad , \quad 37 = 5k_2 + 2 \Rightarrow a = (5k_1 + 1)b + 5k_2 + 2$$

$$\Rightarrow a = 5k' + b + 2$$

در نتیجه برای این‌که a مضرب ۵ باشد، لزوماً $b + 2$ باید مضرب ۵ باشد، یعنی $b = 5k - 2$ است و داریم:

$$38 \le 5k - 2 \le 45 \Rightarrow 40 \le 5k \le 47 \Rightarrow 8 \le k \le 9$$

بنابراین فقط دو جواب مضرب ۵ برای a، وجود دارد.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\left.\begin{matrix} a+2\,|\,a+2 \xrightarrow{\times a} a+2\,|\,a^2+2a \\ a+2\,|\,a^2+2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+2\,|\,2a-2$$

$$\left.\begin{matrix} a+2\,|\,a+2 \xrightarrow{\times 2} a+2\,|\,2a+4 \\ a+2\,|\,2a-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+2\,|\,6$$

$$\Rightarrow a+2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

اگر $a + 2$ برابر ۳ یا ۶ باشد، آنگاه a عددی طبیعی خواهد بود، پس تنها دو مقدار برای a وجود دارد.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر $a = ۶$، $b = ۴$، $c = ۳$ و $d = ۲$ باشد، آنگاه رابطه $ad = bc$ برقرار است. داریم:

گزینه «۱» نادرست است. $۳^۳ / ۶ \times ۲ \Rightarrow c^۲ / ad$

گزینه «۲» نادرست است. $b \neq d$ یا $a \neq c \Rightarrow ۴ \neq ۲$ یا $۶ \neq ۳$

گزینه «۴» نادرست است. $۴ \times ۹ / ۶ \times ۲ \Rightarrow bc^۲ / ad$

اثبات درستی گزینه «۳»: $ad = bc \Rightarrow a|bc \xrightarrow{\times c} a|bc^۲$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

$$y = \frac{۸+۵|x|}{|x|} = \frac{۸}{|x|} + ۵$$

۵ عددی صحیح است، پس برای آن که $\frac{۸+۵|x|}{|x|}$ صحیح باشد، لازم است $\frac{۸}{|x|}$ هم صحیح باشد، یعنی $|x|$ عدد ۸ را عاد کند. در این صورت داریم:

$$|x| = ۱, ۲, ۴, ۸$$

$$\begin{cases} |x| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow (۱, ۱۳), (-۱, ۱۳) \\ |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow (۲, ۹), (-۲, ۹) \\ |x| = ۴ \Rightarrow x = \pm ۴ \Rightarrow (۴, ۷), (-۴, ۷) \\ |x| = ۸ \Rightarrow x = \pm ۸ \Rightarrow (۸, ۶), (-۸, ۶) \end{cases}$$

در بین نقاط به دست آمده تنها در نقطه $(۸, ۶)$، $x \geq y$ است و در نتیجه ۷ نقطه با مشخصات موردنظر بر روی این نمودار وجود دارد.

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید $a_۱ = a$، $a_۲ = a + d$ و $a_۳ = a + ۲d$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\begin{rcases} a|a+d\,,\ a+d|a+۲d \xrightarrow{\text{خاصیت‌تعدی}} a|a+۲d \\ a|a+d \end{rcases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a|d \Rightarrow d = ka$$

$$a+d|a+۲d \xrightarrow{d=ka} a+ka|a+۲ka$$

$$\begin{rcases} \xrightarrow{\div a} ۱+k|۱+۲k \\ ۱+k|۲+۲k \end{rcases} \Rightarrow ۱+k|۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+k=۱ \Rightarrow k=۰ \Rightarrow d=۰ \ \text{غ ق} \\ ۱+k=-۱ \Rightarrow k=-۲ \Rightarrow d=-۲a \end{cases}$$

بنابراین مجموع سه جمله برابر است با:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = a - a - ۳a = -۳a$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{rcases} a = ۷k+۵ \xrightarrow{\times ۹} ۹a = ۶۳k+۴۵ \\ a = ۹k'+۴ \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۶۳k'+۲۸ \end{rcases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a = ۶۳(k-k')+۱۷$$

طرف راست تساوی به دست آمده باید عددی زوج باشد، پس $k - k'$ لزوماً عددی فرد است و در نتیجه داریم:

$$۲a = ۶۳(۲q+۱)+۱۷ \Rightarrow ۲a = ۶۳ \times ۲q + ۸۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a = ۶۳q + ۴۰$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنید $d = (3n + a, 7n + 3)$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|3n + a \xrightarrow{\times 7} d|21n + 7a \\ d|7n + 3 \xrightarrow{\times 3} d|21n + 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|7a - 9$$

اگر به ازای تمامی مقادیر n، $d = 1$باشد، آنگاه لزوماً $7a - 9 = \pm 1$ است و داریم:

$$\begin{cases} 7a - 9 = 1 \Rightarrow a = \frac{10}{7} \notin N \\ 7a - 9 = -1 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \notin N \end{cases}$$

پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$7|a + 3b \Rightarrow 7|2a + 6b$$

$$\left.\begin{array}{l} 7|2a + 6b \\ 7|2a + kb \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 7|(k - 6)b$$

یعنی $(k - 6)b$ بر ۷ بخش‌پذیر است. چون b بر ۷ بخش‌پذیر نیست و ۷ عددی اول است، الزاماً $k - 6$ بر ۷ بخش‌پذیر است که در مجموعه A، فقط ۱- و ۶، این ویژگی را دارند.

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

طبق ویژگی‌های رابطه عاد کردن، اگر $a|b$، آنگاه a هر مضربی از b را نیز عاد می‌کند و نیز اگر $a|c$ و $a|b$ ، آن‌گاه $a|b \pm c$ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a|6m + 5 \xrightarrow{\times 5} a|30m + 25 \\ a|5m + 4 \xrightarrow{\times 6} a|30m + 24 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

طبق قضیه تقسیم، $a = bq + r$ است که $۰ \le r < b$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۹۶ = bq + ۶ \Rightarrow ۹۰ = bq \Rightarrow q = \frac{۹۰}{b}(b > ۶)$$

یعنی b یکی از مقسوم‌علیه‌های ۹۰ می‌باشد که از ۶ بزرگ‌تر است.

$$b = ۹, ۱۰, ۱۵, ۱۸, ۳۰, ۴۵, ۹۰$$

پس برای b، ۷ عدد طبیعی وجود دارد.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

$$۸y - x^۲ - ۴x - ۱۱ = ۰ \Rightarrow y = \frac{x^۲+۴x+۱۱}{۸}$$

اگر x عددی زوج باشد، آنگاه $x^۲$ و $۴x$ اعدادی زوج و در نتیجه $x^۲ + ۴x + ۱۱$ عددی فرد است، پس بر ۸ بخش‌پذیر نمی‌باشد و در نتیجه به ازای هر x زوج، y عددی صحیح نیست.

اگر x عددی فرد باشد، آنگاه $x = ۲k + ۱$ و $x^۲ = ۸k'+۱$ است $(k, k' \in Z)$، بنابراین داریم:

$$y = \frac{(۸k'+۱)+۴(۲k+۱)+۱۱}{۸} = \frac{۸k'+۸k+۱۶}{۸} = k + k'+۲$$

یعنی به ازای هر x فرد، y عددی صحیح است، پس بی‌شمار نقطه با مختصات صحیح بر روی این منحنی وجود دارد.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید $(a^۲ + a + ۳ \ , \ a - ۱) = d$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a - ۱ \xrightarrow{\times a} d \mid a^۲ - a \\ d \mid a^۲ + a + ۳ \rightarrow d \mid a^۲ + a + ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۲a + ۳$$

از طرفی $d|a - ۱$، پس $d|۲a - ۲$ و در نتیجه داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} d \mid ۲a + ۳ \\ d \mid ۲a - ۲ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{تفضل}} d \mid ۵ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۵$$

چون در صورت مسئله ذکر شده است که دو عدد نسبت به هم اول‌اند، پس $d \ne ۵$، یعنی $۵ \nmid a - ۱$، در نتیجه $a - ۱ \ne ۵k$ و $a \ne ۵k + ۱$.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

اگر تعداد سؤالات ۷ امتیازی را با x و تعداد سؤالات ۱۲ امتیازی را با y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$۷x + ۱۲y = ۱۷۵ \Rightarrow ۷x \overset{۱۲}{\equiv} ۱۷۵ \xrightarrow[(۷,۱۲)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۵ - ۲ \times ۱۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow x = ۱۲k + ۱ (x \in Z)$$

$$۷(۱۲k + ۱) + ۱۲y = ۱۷۵ \Rightarrow ۱۲y = -۸۴k + ۱۶۸$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} y = -۷k + ۱۴$$

تعداد سؤالات پاسخ داده شده عددی حسابی است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \Rightarrow ۱۲k + ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۱۲} \\ y \geq ۰ \Rightarrow -۷k + ۱۴ \geq ۰ \Rightarrow k \leq ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰ \leq k \leq ۲$$

بنابراین امتیاز ۱۷۵ به ۳ طریق قابل دست‌یابی بوده است.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\overline{a۱۱a} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a - ۱ + ۱ - ۱ + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲$$

$$\xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div ۲} a \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow a = ۶$$

$$\overline{babb} \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳b + ۶ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳b \overset{۹}{\equiv} -۶ \xrightarrow[(۳,۹)=۳]{\div ۳} b \overset{\frac{۹}{۳}}{\equiv} -۲ \Rightarrow b \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow b = ۱, ۴, ۷$$

بنابراین سه عدد ۱۶۱۱، ۴۶۴۴ و ۷۶۷۷، اعداد طبیعی چهاررقمی مورد نظر هستند.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

طبق تمرین ۷ صفحه ۲۹ کتاب درسی، برای هر $n \in N$ و $a,b \in Z$ همواره رابطه $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ برقرار است. بنابراین با فرض $n = ۴۰$، $a = ۳$ و $b = ۵$ داریم:

$$(۳+۵)^{۴۰} \overset{۳\times۵}{\equiv} ۵^{۴۰} + ۳^{۴۰} \Rightarrow ۸^{۴۰} - ۵^{۴۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۳^{۴۰}$$

پس کافی است باقی‌مانده تقسیم $۳^{۴۰}$ بر ۱۵ را به‌دست آوریم:

$$۳^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۸۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۸ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

$$\xrightarrow{\text{بهتوان ۴}} ۳^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۸۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۶$$

$$\xrightarrow{\text{بهتوان ۲}} ۳^{۴۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۳۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۶$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

$$۲۳x \overset{۵۲}{\equiv} ۲۲ \Rightarrow ۲۳x \overset{۵۲}{\equiv} ۲۲ + ۴ \times ۵۲ \overset{۵۲}{\equiv} ۲۳۰$$

$$\xrightarrow[(۲۳,۵۲)=۱]{\div ۲۳} x \overset{۵۲}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow x = ۵۲k + ۱۰$$

$$x \le ۹۹۹ \Rightarrow ۵۲k + ۱۰ \le ۹۹۹ \Rightarrow k \le ۱۹$$

$$\Rightarrow a_{max} = ۵۲ \times ۱۹ + ۱۰ = ۹۹۸$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

$$۷۵x \overset{۱۲}{\equiv} ۵۴ \Rightarrow ۳x \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۳,۱۲)=۳]{\div ۳} x \overset{\frac{۱۲}{۳}}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۴k + ۲ \, (k \in Z)$$

اگر k عددی زوج باشد، آنگاه داریم:

$$x = ۴(۲m) + ۲ \Rightarrow x = ۸m + ۲ \Rightarrow x \in [۲]_۸$$

اگر k عددی فرد باشد، آنگاه داریم:

$$x = ۴(۲m+۱) + ۲ \Rightarrow x = ۸m + ۶ \Rightarrow x \in [۶]_۸$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

$$۷۳x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴x \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow[(۴,۲۳)=۱]{\div ۴} x \overset{۲۳}{\equiv} ۶$$

$$\Rightarrow x = ۲۳k + ۶ \,(k \in Z)$$

$$۱۰ \le x \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۲۳k + ۶ \le ۹۹ \Rightarrow ۴ \le ۲۳k \le ۹۳$$

$$\xrightarrow{k \in Z} ۱ \le k \le ۴$$

بنابراین معادله موردنظر، ۴ جواب در مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی دارد.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دو عدد ۱۴۷ و ۲۳۸ به یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m تعلق دارند، پس داریم:

$$۱۴۷ \overset{m}{\equiv} ۲۳۸ \Rightarrow m|۲۳۸ - ۱۴۷ \Rightarrow m|۹۱ \Rightarrow m|۷ \times ۱۳$$

اگر $m = ۷$ باشد، آن‌گاه تعداد دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه m، کم‌ترین مقدار ممکن یعنی برابر ۷ است. چون a در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m به همراه اعداد ۱۴۷ و ۲۳۸ قرار دارد، پس داریم:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۱۴۷ \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۷k$$

$$۱۰ \le a \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۷k \le ۹۹ \xrightarrow{k \in Z} ۲ \le k \le ۱۴$$

پس ۱۳ مقدار برای k و در نتیجه ۱۳ عدد طبیعی دو رقمی a با شرایط مسئله موجود است.

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه«۳»:

$$۹۶a \overset{۲۸}{\equiv} ۲۶۴b \xrightarrow{۷|۲۸} ۹۶a \overset{۷}{\equiv} ۲۶۴b \Rightarrow ۹۶a - ۱۳ \times ۷a \overset{۷}{\equiv} ۲۶۴b - ۳۷ \times ۷b$$

$$\Rightarrow ۵a \overset{۷}{\equiv} ۵b \xrightarrow[(۵,۷)=۱]{\div ۵} a \overset{۷}{\equiv} b \Rightarrow a - b \overset{۷}{\equiv} ۰$$

گزینه «۱»:

$$a \overset{۷}{\equiv} b \Rightarrow a + ۷ \times ۷a \overset{۷}{\equiv} b + ۴ \times ۷b \Rightarrow ۵۰a \overset{۷}{\equiv} ۲۹b$$

گزینه «۲»:

$$۹۶a \overset{۲۸}{\equiv} ۲۶۴b \xrightarrow{۱۴|۲۸} ۹۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۲۶۴b$$

$$\Rightarrow ۹۶a - ۵ \times ۱۴a \overset{۱۴}{\equiv} ۲۶۴b - ۱۷ \times ۱۴b \Rightarrow ۲۶a \overset{۱۴}{\equiv} ۱۲b$$

اما رابطه گزینه «۴» در حالت کلی درست نیست

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۲

اگر تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی را به‌ترتیب با x و y نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۲۷۰۰۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۲۲۷ \Rightarrow ۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۲۷$$

$$\Rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k + ۱ (k \in Z)$$

$$۲x + ۵(۲k + ۱) = ۲۲۷ \Rightarrow ۲x = -۱۰k + ۲۲۲$$

$$\Rightarrow x = -۵k + ۱۱۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \Rightarrow -۵k + ۱۱۱ \geq ۰ \Rightarrow k \leq \frac{۱۱۱}{۵} \\ y \geq ۰ \Rightarrow ۲k + ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in Z} ۰ \leq k \leq ۲۲$$

بنابراین ۲۳ مقدار صحیح برای k وجود دارد و در نتیجه به ۲۳ طریق می‌توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

فرض کنید تعداد بن‌های کتاب ۵ هزار تومانی و ۱۲ هزارتومانی مورد استفاده به‌ترتیب برابر x و y باشد. در این‌صورت داریم:

$$5000x + 12000y = 218000 \Rightarrow 5x + 12y = 218$$

$$\Rightarrow 12y \overset{5}{\equiv} 218 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 3 \overset{5}{\equiv} 8 \xrightarrow[(2,5)=1]{\div 2} y \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow y = 5k + 4 \quad (k \in Z)$$

$$5x + 12(5k + 4) = 218 \Rightarrow 5x = -60k + 170 \Rightarrow x = -12k + 34$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow -12k + 34 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{17}{6} \\ y \geq 0 \Rightarrow 5k + 4 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{4}{5} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in Z} k = 0, 1, 2$$

پس به ۳ طریق می‌توان این مقدار کتاب را خریداری کرد.

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۲ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

۱) گراف ساده و ناهمبند G از مرتبه ۱۲ مفروض است. اگر $\delta(G) = ۳$ و گراف G دارای حداکثر اندازه ممکن باشد، اندازه گراف $\bar{G}$ کدام است؟

۱) ۳۲   **۲)** ۳۴
۳) ۴۲   **۴)** ۴۸

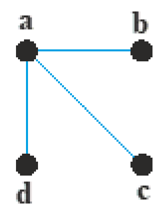
۲) چند گراف ساده وجود دارد که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه آن‌ها برابر ۱۲ باشد؟

۱) ۳   **۲)** ۴   **۳)** ۵   **۴)** ۶

۳) اگر G یک گراف ۲- منتظم از مرتبه p و تعداد یال‌های $\bar{G}$، ۳ واحد بیشتر از تعداد یال‌های G باشد، آنگاه p کدام است؟

۱) ۶   **۲)** ۷
۳) ۸   **۴)** ۹

۴) گراف G در شکل مقابل دارای چند زیرگراف از مرتبه ۴ است؟



۱) ۲   **۲)** ۴
۳) ۸   **۴)** ۱۶

۵) یک گراف ساده ۶ رأسی ۴- منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱) ۹   **۲)** ۱۰   **۳)** ۱۲   **۴)** ۱۵

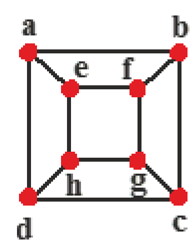
۶) گراف G فقط یک رأس زوج دارد. گراف $\bar{G}$ چند رأس زوج دارد؟

۱) صفر   **۲)** ۱   **۳)** p-۱   **۴)** نامشخص

۷) در یک گراف ساده از مرتبه ۱۸، $\delta = ۲$ و $\Delta = ۵$ است. اندازه این گراف چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲۳   **۲)** ۲۴   **۳)** ۲۵   **۴)** ۲۶

۸) در گراف شکل مقابل چند دور به طول ۶ وجود دارد؟



۱) ۴   **۲)** ۶
۳) ۸   **۴)** ۱۲

۹) اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۱۲ باشد، گراف $\overline{G}$ چگونه است؟

۱) ۸- منتظم **۲)** ۹- منتظم **۳)** ۱۰- منتظم **۴)** منتظم نیست

۱۰) گراف $C_۴$ چند زیرگراف ۱- منتظم دارد؟

۱) ۴ **۲)** ۵ **۳)** ۶ **۴)** ۱۰

۱۱) گراف $K_۴$ با رأس‌های a، b، c و d، چند زیرگراف مانند G دارد که در آنها تعداد یال‌های G از $\overline{G}$ کمتر باشد؟

۱) ۲۲ **۲)** ۲۸
۳) ۳۸ **۴)** ۴۴

۱۲) گراف ۲- منتظم G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ مفروض است. این گراف، چند زیرگراف از مرتبه ۴ دارد؟

۱) ۴۰ **۲)** ۲۰
۳) ۱۰ **۴)** ۵

۱۳) حاصل‌ضرب درجات رئوس گراف G از مرتبه ۶، برابر ۴۸۰ است. گراف $\overline{G}$ چند یال دارد؟

۱) ۶ **۲)** ۷
۳) ۸ **۴)** ۹

۱۴) در یک گراف ساده با درجه رأس‌های ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۳ **۲)** ۴ **۳)** ۵ **۴)** ۶

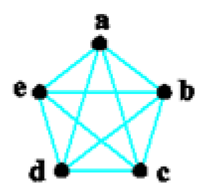
۱۵) در یک گراف ساده، $p = ۶$ و $q = ۴$ است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۱ می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ **۲)** ۴
۳) ۵ **۴)** ۶

۱۶) در گرافی با اندازه ۲۴، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آنگاه تعداد آنها کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ **۲)** ۴ **۳)** ۸ **۴)** ۱۶

۱۷) گراف شکل زیر، چند زیرگراف دارد به‌گونه‌ای که در هر کدام از آنها، $q = ۵$ و $deg(a) = ۴$ باشد؟

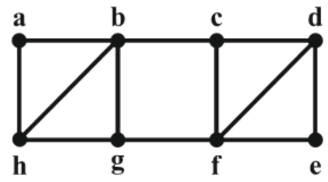


۱) ۳ **۲)** ۵
۳) ۶ **۴)** ۸

۱۸) با حذف ۲۴ یال از گراف کامل K_p، گراف G حاصل شده است. اگر گراف $\overline{G}$، ۴- منتظم باشد، آن‌گاه $\Delta(G)$ کدام است؟

۱) ۶ **۲)** ۷ **۳)** ۸ **۴)** ۹

۱۹) گراف شکل زیر چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۰) گراف G با p = ۸ و Δ = ۶، فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد. کدام گزینه در مورد این گراف لزوماً درست است؟

۱) دوری به طول ۶ دارد
۲) مسیری به طول ۳ دارد
۳) ناهمبند است
۴) حداقل ۸ یال دارد

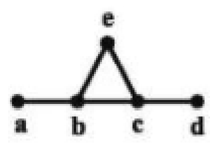
۲۱) گراف کامل K_p دارای ۲۰ مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۲۲) گراف K_4 چند مجموعه احاطه‌گر دارد؟

۱) ۴
۲) ۱۰
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۲۳) با افزودن یال ad به گراف G در شکل مقابل، تعداد γ- مجموعه‌های آن چند واحد افزایش می‌یابد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۴) در گراف G با درجه رئوس ۵,۳,۳,۳,۲,۲، بین هر دو رأس دلخواه a و b، رابطه $N_G[a] = N_G[b] \Leftrightarrow \deg(a) = \deg(b)$ برقرار است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

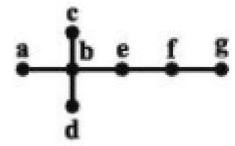
۲۵) کدام یک از گراف‌های زیر، هیچ مجموعه احاطه‌گر مینیمالی ندارد که تعداد اعضای آن بیشتر از عدد احاطه‌گری گراف باشد؟

۱) C_6
۲) C_7
۳) C_8
۴) C_9

۲۶) در گراف G از مرتبه ۱۰، بین هر دو رأس غیرمجاور دقیقاً یک مسیر به طول ۲ وجود دارد. عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۷) گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟



۱) ۲ **۲)** ۳
۳) ۴ **۴)** ۵

۲۸) گراف G از مرتبه ۶ دارای γ- مجموعه با اندازه یک است. این گراف حداقل چند یال دارد؟

۱) ۵ **۲)** ۶
۳) ۱۰ **۴)** ۱۵

۲۹) در یک گراف ۵ رأسی K − منتظم با بیشترین مقدار ممکن K تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

۱) ۸ **۲)** ۱۰ **۳)** ۱۲ **۴)** ۱۵

۳۰) در گراف G، $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $N_G(a) = N_G(b) = N_G(c)$ و $N_G(d) = N_G(e) = N_G(f)$ است. اگر G یک گراف تهی نباشد، چند γ- مجموعه دارد؟

۱) ۳ **۲)** ۶
۳) ۸ **۴)** ۹

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۲ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

گراف ناهمبند G در صورتی دارای حداکثر اندازه ممکن است که از دو بخش جدا از هم تشکیل شده باشد. با توجه به اینکه مینیمم درجه در گراف G برابر ۳ است، حداکثر اندازه در صورتی امکان‌پذیر است که گراف G از یک گراف $K_۸$ و یک گراف $K_۴$ تشکیل شده باشد. در این صورت داریم:

$$q(G) = q(K_۸) + q(K_۴) = \frac{۸\times۷}{۲} + \frac{۴\times۳}{۲} = ۳۴$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-۱)}{۲} \Rightarrow ۳۴ + q(\bar{G}) = \frac{۱۲\times۱۱}{۲}$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = ۶۶ - ۳۴ = ۳۲$$

سوال ۲

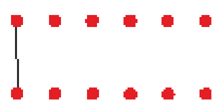
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$۱۲ = ۱۲\times۱ = ۶\times۲ = ۴\times۳$$

حالت اول: $q = ۱, p = ۱۲$

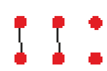
در این حالت تنها یک گراف قابل رسم است.



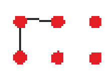
G_1

حالت دوم: $q = ۲, p = ۶$

در این حالت دو گراف قابل رسم است.



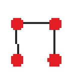
G_2



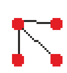
G_3

حالت سوم: $q = ۳, p = ۴$

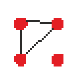
در این حالت سه گراف قابل رسم است.



G_4



G_5



G_6

بنابراین در مجموع ۶ گراف متمایز با شرایط موردنظر قابل رسم است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به رابطه $rp = ۲q$ در گراف‌های r-منتظم، در هر گراف ۲-منتظم، $p = q$ است. از طرفی مجموع تعداد یال‌های یک گراف و مکمل آن، برابر تعداد یال‌های گراف کامل هم‌مرتبه آن است، پس داریم:

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p + (p + ۳) = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲p + ۳ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۴p + ۶ = p^۲ - p \Rightarrow p^۲ - ۵p - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (p - ۶)(p + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p = ۶ \\ p = -۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

هر زیر گراف مرتبه ۴ گراف G باید شامل هر ۴ رأس a، b، c و d باشد ولی می‌تواند هر یک از یال‌های ab، ac و ad را داشته باشد و یا فاقد آنها باشد. بنابراین برای هر کدام از این یال‌ها در زیر گراف‌های مورد نظر دو حالت وجود دارد و در نتیجه طبق اصل‌ضرب داریم:

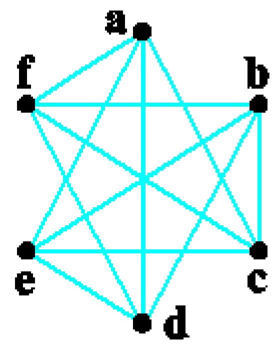
$$\text{تعداد زیر گراف ها} = \underset{ab}{\underset{\downarrow}{۲}} \times \underset{ac}{\underset{\downarrow}{۲}} \times \underset{ad}{\underset{\downarrow}{۲}} = ۸$$

سوال ۵

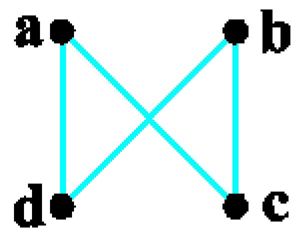
پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

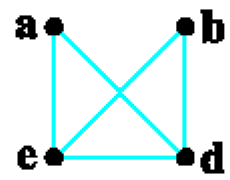
گراف ۴-منتظم از مرتبه ۶ در شکل مقابل رسم گردیده است. هر ۴ رأس دلخواه از این گراف و یال‌های بین آنها به یکی از دو صورت زیر هستند:



الف) ۴ رأس می‌توانند یک گراف با اندازه ۴ مطابق شکل زیر ایجاد کنند. چنین گرافی فقط یک دور به طول ۴ (دور acbda) دارد.



ب) ۴ رأس می‌توانند یک گراف با اندازه ۵ مطابق شکل زیر ایجاد کنند. چنین گرافی نیز فقط یک دور به طول ۴ (دور adbea) دارد.



یعنی هر ۴ رأس دلخواه در این گراف، فقط یک دور به طول ۴ ایجاد می‌کند. پس تعداد دورهای به‌طول ۴ در گراف ۴-منتظم مرتبه ۶ برابر است با: $\binom{۶}{۴} = ۱۵$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

اگر گراف G، یک رأس زوج داشته باشد، آنگاه $p - ۱$ رأس فرد دارد. از آن جا که تعداد رأس‌های فرد یک گراف، عددی زوج است، پس $p - ۱$ عددی زوج است. می‌دانیم بین درجه یک رأس در گراف G و $\overline{G}$، رابطه $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p - ۱$ برقرار است، پس اگر درجه رأسی در گراف G، زوج باشد، با توجه به زوج بودن $p - ۱$، درجه آن رأس در گراف $\overline{G}$ نیز زوج خواهد بود و به‌طور مشابه اگر درجه رأسی در گراف G، فرد باشد، درجه آن رأس در گراف $\overline{G}$، فرد خواهد بود. بنابراین اگر گراف G فقط یک رأس زوج داشته باشد، گراف $\overline{G}$ نیز فقط یک رأس زوج دارد.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

کم‌ترین اندازه گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجه ۵ $\Delta = ۵$ داشته و سایر رأس‌ها از درجه ۲ $\delta = ۲$ باشند، اما چون تعداد رئوس فرد گراف، باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجه ۵، یک رأس از درجه ۳ و ۱۶ رأس از درجه ۲ دارد. داریم:

$$۲q_{min} = ۵ + ۳ + ۱۶ \times ۲ = ۴۰ \Rightarrow q_{min} = ۲۰$$

بیش‌ترین اندازه گراف مربوط به حالتی است که گراف فقط یک رأس از درجه ۲ $\delta = ۲$ داشته و سایر رأس‌ها از درجه ۵ $\triangle = ۵$ باشند که مانند حالت قبل چون تعداد رئوس فرد گراف باید عددی زوج باشد، چنین گرافی لزوماً یک رأس از درجه ۲، یک رأس از درجه ۴ و ۱۶ رأس از درجه ۵ دارد. داریم:

$$۲q_{max} = ۱۶ \times ۵ + ۴ + ۲ = ۸۶ \Rightarrow q_{max} = ۴۳$$

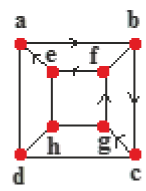
یعنی $۲۰ \le q \le ۴۳$ است، پس اندازه گراف، ۲۴ مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد.

سوال ۸

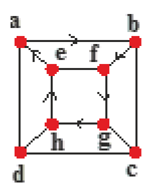
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

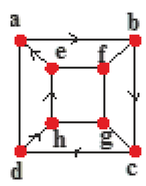
دسته اول: دورهایی به فرم abcgfea یعنی دورهایی که از سه رأس بیرونی و سه رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آن‌ها برابر ۴ است.



دسته دوم: دورهایی به فرم abfghea یعنی دورهایی که از دو رأس بیرونی و چهار رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آن‌ها برابر ۴ است.



دسته سوم: دورهایی به فرم abcdhea یعنی دورهایی که از چهار رأس بیرونی و دو رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آن‌ها برابر ۴ است.



بنابراین در مجموع ۱۲ دور به طول ۶ در این گراف وجود دارد.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنید v رأسی از گراف Gو p مرتبه گراف باشد. در این‌صورت داریم:

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = p - ۱$$

در گراف ۳- منتظم G، درجه همه رئوس برابر ۳ است، پس خواهیم داشت:

$$۳ + d_{\overline{G}}(v) = ۱۲ - ۱ \Rightarrow d_{\overline{G}}(v) = ۸$$

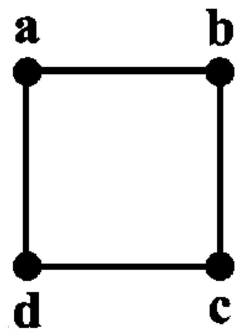
یعنی درجه تمام رئوس گراف $\overline{G}$، برابر ۸ است، پس گراف $\overline{G}$ یک گراف ۸- منتظم از مرتبه ۱۲ است.

سوال ۱۰

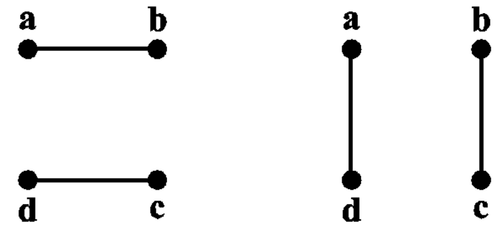
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

گراف $C_۴$ مطابق شکل مقابل است:



هر یال گراف، یک زیرگراف ۱- منتظم محسوب می‌شود، پس گراف $C_۴$ دارای ۴ زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۲ است. همچنین مطابق شکل زیر، گراف $C_۴$ دو زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۴ دارد.



بنابراین گراف $C_۴$ در مجموع دارای ۶ زیرگراف ۱- منتظم است.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

تعداد یال‌های گراف $K_۴$ برابر ۶ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۴ برابر صفر، ۱ یا ۲ باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۴ در این حالت برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۶}{۰}}_{\text{بدون یال}} + \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{دارای یک یال}} + \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{دارای دو یال}} = ۱ + ۶ + ۱۵ = ۲۲$$

دارای دو یال دارای یک یال بدون یال

تعداد یال‌های گراف $K_۳$ برابر ۳ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۳ برابر صفر یا ۱ باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۳ در این حالت برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ راس از ۴ راس}} \times \left(\underbrace{\binom{۳}{۰}}_{\text{بدون یال}} + \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{دارای یک یال}}\right) = ۴(۱ + ۳) = ۱۶$$

تعداد یال‌های گراف $K_۲$ برابر ۱ است، پس در صورتی‌که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۲ برابر صفر باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۲ در این حالت برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ راس از ۴ راس}} \times \underbrace{\binom{۲}{۰}}_{\text{بدون یال}} = ۶ \times ۱ = ۶$$

بنابراین تعداد زیرگراف‌های مورد نظر برابر است با:

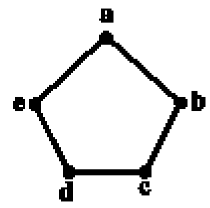
$$۲۲ + ۱۶ + ۶ = ۴۴$$

سوال ۱۲

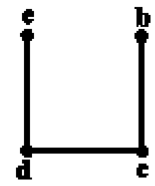
پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

گراف G به صورت زیر مفروض است.



هر زیرگراف مرتبه ۴ از این گراف، فاقد یکی از رأس‌های این گراف است. فرض کنید رأس a را حذف کنیم. در این صورت گراف حاصل (گراف $G_۱$) به صورت زیر است:



این گراف دارای ۴ رأس و ۳ یال است. در هر زیرگراف مرتبه ۴ از گراف $G_۱$، هر یک از یال‌های bc، cd و de می‌توانند وجود داشته باشند یا نداشته باشند، بنابراین برای هر یال، دو حالت وجود دارد و در نتیجه تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۴ گراف $G_۱$ برابر است با:

$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

چون با حذف هر یک از رأس‌های دیگر گراف G، گرافی مانند گراف $G_۱$ (یعنی از مرتبه ۴ و اندازه ۳) پدید می‌آید، پس تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۴ گراف G برابر است با: $۵ \times ۸ = ۴۰$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ«۱»

با توجه به اینکه $۵ \times ۳ \times ۲^۵ = ۴۸۰$ است، پس تنها حالت ممکن برای درجات رئوس گراف G به‌صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ و ۵ است (گرافی با درجات رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۴ و ۵ وجود ندارد چون تعداد رئوس فرد گراف همواره عددی زوج است). بنابراین داریم:

$$۲q = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۸ \Rightarrow q = ۹$$

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۹ + q(\overline{G}) = \frac{۶\times۵}{۲}$$

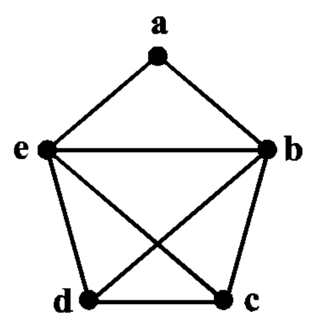
$$\Rightarrow q(\overline{G}) = ۶$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

«۳»

گراف مورد نظر مطابق شکل زیر است:



دورهای به طول ۴ در این گراف عبارت‌اند از:

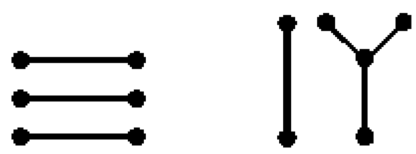
abcea, abdea, bcdeb, bcedb, bdceb

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

این گراف نمی‌تواند ۶ رأس درجه ۱ داشته باشد، چون در این صورت مطابق شکل (۱) دارای ۳ یال خواهد بود که مخالف فرض است. در صورتی که گراف را مطابق شکل (۲) رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که گراف موردنظر می‌تواند حداکثر دارای ۵ رأس از درجه ۱ باشد.



شکل (۱)   شکل (۲)

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

مجموع درجات رئوس یک گراف، دو برابر اندازه آن گراف است. اگر مجموع درجات رئوس گراف را به‌صورت مجموع درجات رئوس زوج و مجموع درجات رئوس فرد بنویسیم، آنگاه داریم:

$۴۸ = ۳۲ + x \Rightarrow x = ۱۶$

در نتیجه تنها حالت ممکن آن است که گراف ۱۶ رأس درجه یک داشته باشد. (عدد ۱۶ به هیچ عدد فرد دیگری بخش‌پذیر نیست.)

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

چون درجه رأس a مساوی ۴ است، پس در هر یک از زیرگراف‌های مورد نظر، رأس a با ۴ یال به رئوس b، c، d و e متصل است (تمام این زیرگراف‌ها لزوماً از مرتبه ۵ هستند). در این‌صورت از ۶ یال باقی‌مانده در گراف صورت سؤال، یکی باید به دلخواه انتخاب شود که در نتیجه ۶ زیرگراف با مشخصات داده‌شده قابل رسم است.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به اینکه مکمل گراف K_p، گراف تهی است، پس گراف $\bar{G}$ دارای ۲۴ یال است و در نتیجه برای این گراف داریم: (r درجه هر رأس این گراف است.) $2q = pr \Rightarrow 48 = p \times 4 \Rightarrow p = 12$

از طرفی اگر a رأس دلخواهی از گراف G باشد، آن‌گاه: $d_G(a) + d_{\bar{G}}(a) = p - 1 \Rightarrow d_G(a) + 4 = 12 - 1 \Rightarrow d_G(a) = 7$

یعنی درجه هر رأس گراف G برابر ۷ است (گراف G، ۷- منتظم است) و در نتیجه ماکزیمم درجه در این گراف نیز برابر ۷ است.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۲ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن عبارت‌اند از:

$\{a, f\}$ و $\{b, d\}$ و $\{b, e\}$ و $\{b, f\}$ و $\{d, h\}$ و $\{f, h\}$.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

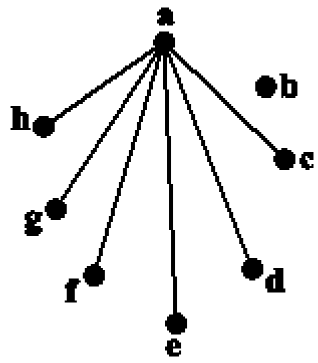
گزینه «۳»

فرض کنید رأس a در این گراف از درجه ۶ = Δ باشد.

در این گراف چون $\Delta \neq p - 1$ پس عدد احاطه‌گری بیش‌تر از یک است و رأس با درجه ۶ = Δ فقط با یک رأس از گراف مجاور نیست. آن رأس را b می‌نامیم. بدیهی است که مجموعه $\{a, b\}$ احاطه‌گر است. فرض کنیم مسیری بین دو رأس a و b وجود داشته باشد مثلاً مسیر $a \cdots cb$ بنابراین مجموعه $\{a, c\}$ نیز احاطه‌گر است که با فرض در تناقض است.

بنابراین بین رأس‌های a و b مسیری وجود ندارد و گراف G ناهمبند است.

مثال نقض برای گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» را می‌توان در شکل زیر مشاهده کرد.



سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

در گراف کامل، هر رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، بنابراین با انتخاب هر ۳ رأس دلخواه از میان رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی پدید می‌آید. داریم:

$$\binom{p}{۳} = ۲۰ \Rightarrow \frac{p!}{۳!(p-۳)!} = ۲۰ \Rightarrow \frac{p(p-۱)(p-۲)}{۶} = ۲۰$$

$$\Rightarrow p(p-۱)(p-۲) = ۱۲۰ = ۶ \times ۵ \times ۴ \Rightarrow p = ۶$$

از طرفی در یک گراف کامل، هر رأس به تنهایی قادر به احاطه تمام رئوس گراف است، پس مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال در گراف کامل، تنها یک عضو دارند و در نتیجه گراف $K_۶$ دارای ۶ مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۴

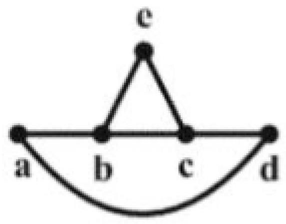
گزینه «۴»

در گراف $K_۴$، هر رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، پس هر زیر مجموعه دلخواه غیرتهی از مجموعه رئوس این گراف، یک مجموعه احاطه‌گر برای آن است. اگر $V = \{a, b, c, d\}$ مجموعه رئوس گراف $K_۴$ باشد، آنگاه این مجموعه دارای $۲^۴ - ۱ = ۱۵$ زیر مجموعه غیرتهی است، پس ۱۵ مجموعه احاطه‌گر دارد.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه«۴»



عدد احاطه‌گری گراف G برابر ۲ و γ− مجموعه‌های آن $\{a, c\}, \{b, c\}$ و $\{b, d\}$ هستند. با افزودن یال ad به گرافG ، گراف شکل مقابل حاصل می‌شود.

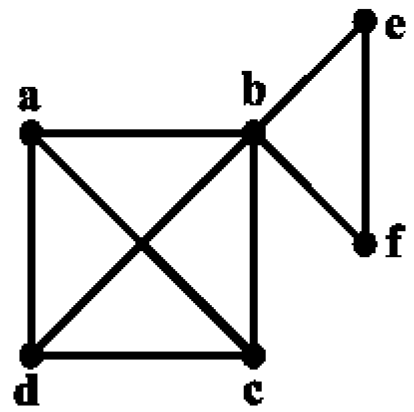
عدد احاطه‌گری این گراف نیز برابر ۲ است و علاوه بر ۳ مجموعه احاطه‌گر مینیمم قبلی، دارای ۴ مجموعه احاطه‌گر مینیمم دیگر به صورت $\{a, e\}, \{d, e\}, \{a, b\}$ و $\{c, d\}$ نیز می‌باشد.

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

مرتبه گراف G برابر ۶ است، پس رأس درجه ۵ با تمام رئوس دیگر گراف مجاور است. با توجه به رابطه داده شده، مجموعه همسایگی بسته تمام رئوس درجه ۳ در این گراف یکسان است، پس تمام رئوس درجه ۳ مجاور هستند و به همین ترتیب دو رأس درجه ۲ نیز مجاور یکدیگرند، پس نمودار گراف G به مطابق شکل مقابل است.

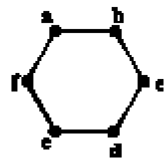


رأس b با تمام رئوس دیگر گراف مجاور است، پس {b} یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. سایر مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف قطعاً فاقد رأس b هستند و هر کدام شامل یک رأس از مجموعه {a, c, d} و یک رأس از مجموعه {e, f} می‌باشند که تعداد این مجموعه‌ها برابر ۶ = ۲ × ۳ است. در نتیجه گراف G ، ۷ مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد.

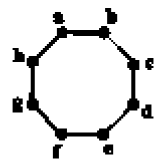
سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

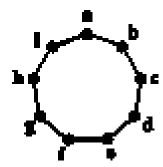
گزینه «۱»: عدد احاطه‌گری گراف C_6 ، برابر ۲ است ولی مطابق شکل مجموعه $A = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



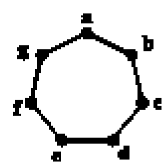
گزینه «۳»: عدد احاطه‌گری گراف C_8 ، برابر ۳ است ولی مطابق شکل مجموعه $B = \{a, c, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



گزینه «۴» عدد احاطه‌گری گراف C_9 ، برابر ۳ است ولی مطابق شکل مجموعه $C = \{a, d, f, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



گزینه «۲»: عدد احاطه‌گری گراف C_7 ، برابر ۳ است و هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال این گراف دقیقاً دارای ۳ عضو است.



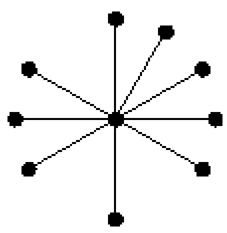
سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به ویژگی‌های مفروض، گراف به صورت زیر است:

در این گراف یک رأس با تمام رئوس دیگر مجاور است، پس $\gamma(G) = ۱$ است.



سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه«۳»

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارت‌اند از:

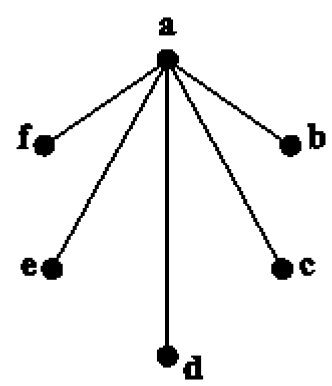
$\{b, f\}, \{b, g\}, \{a, c, d, f\}, \{a, c, d, e, g\}$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

گراف دارای مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک عضوی است، پس رأسی در این گراف وجود دارد که با تمام رئوس دیگر گراف مجاور است. مطابق شکل زیر چنین گرافی حداقل دارای ۵ یال است.



سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در یک گراف ۵ رأسی، حداکثر درجه رأس‌ها برابر ۴ است، پس گراف موردنظر ۴ − منتظم از مرتبه ۵ یا گراف کامل $K_۵$ است. تعداد دورهای با طول ۴ در این حال گراف برابراست با:

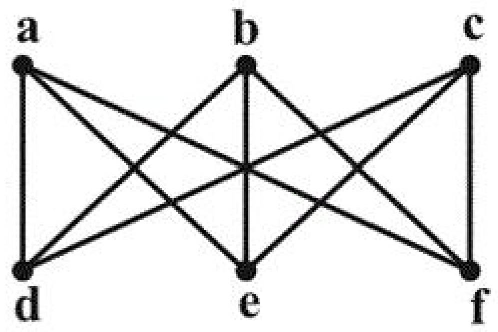
$$\binom{۵}{۴} \times \frac{(۴-۱)!}{۲} = ۱۵$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۴

اگر مجموعه همسایگی باز دو رأس در یک گراف یکسان باشد، آنگاه آن دو رأس قطعاً مجاور نیستند.

با توجه به داده‌های سؤال، گراف G متناظر با شکل زیر است:



هریک از رأس‌های پایینی با تمام رئوس بالایی مجاور است و بالعکس، بنابراین با انتخاب یک رأس از مجموعه رئوس بالایی و یک رأس از مجموعه رئوس پایینی، تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند، پس طبق اصل ضرب تعداد γ- مجموعه‌ها برابر است با:
۹ = ۳ × ۳

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

۱) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4^3 = 12$ کدام است؟

۱) ۴۵ **۲)** ۴۸ **۳)** ۷۸ **۴)** ۹۳

۲) با حروف کلمه «کاراته»، چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت که بعد از حذف دو حرف «الف»، کلمه باقی‌مانده «ترکه» باشد؟

۱) ۱۰ **۲)** ۱۵ **۳)** ۲۰ **۴)** ۳۰

۳) مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$، چند زیرمجموعه چهارعضوی دارد به طوری که مجموع اعضای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها مضرب ۳ باشد؟

۱) ۳۶ **۲)** ۴۵ **۳)** ۵۴ **۴)** ۶۹

۴) تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

، کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۶

۵) به چند طریق می‌توان ۷ شاخه گل از میان ۴ نوع گل مختلف انتخاب کرد به گونه‌ای که از هر نوع گل، حداقل یک شاخه انتخاب شده باشد؟

۱) ۲۰ **۲)** ۳۵ **۳)** ۸۴ **۴)** ۱۲۰

۶) به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل ۱۵ شاخه انتخاب کرد، به‌طوری که از هر نوع آن، حداقل ۲ شاخه انتخاب شود؟

۱) ۱۰۵ **۲)** ۱۲۰ **۳)** ۱۲۵ **۴)** ۱۵۰

۷) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_5 = 2$ و $x_1 > 3$ باشد؟

۱) ۲۰ **۲)** ۳۵ **۳)** ۵۶ **۴)** ۸۴

۸) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ با شرط $x_1 > 2$ و $x_2 > 3$کدام است؟

۱) ۲۰ **۲)** ۳۵
۳) ۵۶ **۴)** ۱۲۰

۹) با ارقام ۰, ۰, ۳, ۳, ۳, ۵, ۵، چند عدد هفت‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱) ۵۰ **۲)** ۶۰
۳) ۷۵ **۴)** ۱۰۰

۱۰) خانه‌های مربع مقابل را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱ تا ۴ پر کرد به‌طوری که یک مربع لاتین تشکیل شود؟

۱			
	۲		
		۲	
			۱

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱) معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ ، چند دسته جواب طبیعی فرد دارد؟

۱) ۲۸ **۲)** ۳۶ **۳)** ۴۵ **۴)** ۶۶

۱۲) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4^2 = 12$ کدام است؟

۱) ۶۷
۲) ۸۴
۳) ۱۲۲
۴) ۱۳۳

۱۳) در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق، می‌توان برنامه تدریس تعیین کرد؟

۱) ۶ **۲)** ۹ **۳)** ۱۲ **۴)** ۱۸

۱۴) اگر دو مربع لاتین

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

= A و B متعامد باشند، آنگاه به ازای کدام مربع لاتین C، دو مربع لاتین B و C قطعاً متعامد هستند؟

۱)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۲)

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۳)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۴)

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱۵) با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷، چند عدد شش‌رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت به گونه‌ای که در همه آن‌ها، ارقام ۲، ۴ و ۶ به صورت صعودی یا نزولی قرار داشته باشند؟

۱) ۴۸۰
۲) ۵۱۲
۳) ۵۶۰
۴) ۶۴۰

۱۶) به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۶ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم؟

۱) ۱۲۰ **۲)** ۲۴۰ **۳)** ۳۶۰ **۴)** ۷۲۰

۱۷) درون یک مستطیل ۱۸ × ۹، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم لااقل فاصله ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از $3\sqrt{2}$ باشد؟

۱) ۱۷ **۲)** ۱۸ **۳)** ۱۹ **۴)** ۲۰

۱۸) تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود، کدام است؟

۱) ۵۲ **۲)** ۵۴ **۳)** ۵۶ **۴)** ۵۸

۱۹) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، کدام است؟

۱) ۳۶۰ **۲)** ۴۵۰ **۳)** ۴۸۰ **۴)** ۵۴۰

۲۰) اگر هر یال از یال‌های گراف کامل K_{16} را با یکی از ۷ رنگ موجود رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه بزرگ‌ترین مقدار n به‌طوری که مطمئن باشیم حداقل n یال در این گراف هم‌رنگ هستند، کدام است؟

۱) ۱۷ **۲)** ۱۸ **۳)** ۱۹ **۴)** ۲۰

۲۱) چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد به‌گونه‌ای که شامل حداقل یکی از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد؟

۱) ۷۰۶ **۲)** ۶۰۶ **۳)** ۳۹۴ **۴)** ۲۹۴

۲۲) در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر فوتبال، ۱۴ نفر والیبال و ۱۰ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۴ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۶ نفر فوتبال و والیبال، ۵ نفر فوتبال و بسکتبال و ۴ نفر والیبال و بسکتبال بازی می‌کنند، آنگاه چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می‌کنند؟

۱) ۱ **۲)** ۲
۳) ۳ **۴)** ۴

۲۳) در چند جایگشت از حروف کلمه TEHRAN، هیچ‌کدام از حروف T، R و N سر جای خود قرار ندارند؟

۱) ۳۶۰ **۲)** ۳۶۶
۳) ۴۲۰ **۴)** ۴۲۶

۲۴) فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۵ و بخش‌پذیر بر ۳ باشد. اگر هر زیر مجموعه k عضوی از مجموعه A، دست کم دارای دو عضو با مجموع ۳۳ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۵ **۲)** ۶ **۳)** ۷ **۴)** ۸

۲۵) در دو کیسه، مهره‌هایی با رنگ‌های قرمز، آبی و سفید ریخته‌ایم. حداقل تعداد مهره‌ها چقدر باید باشد تا مطمئن باشیم حداقل در یکی از کیسه‌ها، دست کم ۳ مهره هم‌رنگ داریم؟

۱) ۹ **۲)** ۱۳ **۳)** ۱۵ **۴)** ۱۹

۲۶) چند تابع پوشا از مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c, d\}$ می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که شامل زوج مرتب $(۴, d)$ بوده ولی شامل زوج مرتب $(۳, b)$ نباشد؟

۱) ۲ **۲)** ۴ **۳)** ۶ **۴)** ۸

۲۷) با مجموعه رأس‌های $\{a, b, c, d, e\}$ چند گراف ساخته می‌شود به‌طوری که هیچکدام از رأس‌های a و b تنها نباشند؟

۱) ۱۰۱۶ **۲)** ۹۰۴ **۳)** ۸۵۴ **۴)** ۷۶۸

۲۸) از بین ۱۰ نفر در هر مرحله به تصادف ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم و به هر یک از آن‌ها ۵۰ سکه می‌دهیم. این عمل باید حداقل چند بار انجام شود تا مطمئن شویم بین آن‌ها فردی وجود دارد که به او حداقل ۴۰۰ سکه رسیده است؟

۱) ۱۷ **۲)** ۱۸ **۳)** ۱۹ **۴)** ۲۰

۲۹) از مجموعه اعداد دو رقمی مضرب ۳، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در میان اعداد انتخابی، دو عضو با مجموع ۹۶ وجود دارند؟

۱) ۱۳ **۲)** ۱۵ **۳)** ۱۷ **۴)** ۱۹

۳۰) چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد به‌طوری که از بین اعداد ۲، ۳ و ۵، تنها بر ۲ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۳۴ **۲)** ۲۴ **۳)** ۲۷ **۴)** ۳۶

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون گسسته فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$x_۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۱۱ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

$$x_۴ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۴ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۳}{۲} = ۳$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $۴۵ + ۳ = ۴۸$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مطابق شکل برای قرار دادن حروف «الف»، در بین حروف کلمه «ترکه» و قبل و بعد از آن‌ها، ۵ مکان وجود دارد که با علامت × مشخص شده است.

X ت X ر X ک X ه X

کافی است ۲ مکان را از بین آن‌ها انتخاب کنیم و دو حرف «الف» را در آن قرار دهیم یا اینکه یک مکان را انتخاب کنیم و هر دو حرف «الف» را در آن مکان کنار هم بگذاریم. تعداد روش های انجام این کار برابر است با:

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۱} = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

مجموعه A را می‌توان به سه زیرمجموعه $A_۰$، $A_۱$ و $A_۲$ افراز نمود به گونه‌ای که باقی‌مانده تقسیم هر یک از اعضای مجموعه $A_i(i = ۰,۱,۲)$ بر عدد ۳، برابر i باشد.

$$A_۰ = \{۳, ۶, ۹\}, A_۱ = \{۱, ۴, ۷, ۱۰\}, A_۲ = \{۲, ۵, ۸\}$$

حالت‌های ممکن در این سؤال عبارت‌اند از:

۱) انتخاب دو عضو از $A_۱$ و دو عضو از $A_۲$: $\binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۲} = ۶ \times ۳ = ۱۸$

۲) انتخاب دو عضو از $A_۰$ و یک عضو از هر کدام از $A_۱$ و $A_۲$: $\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۳ \times ۴ \times ۳ = ۳۶$

۳) انتخاب یک عضو از $A_۰$ و سه عضو از $A_۱$: $\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۳} = ۳ \times ۴ = ۱۲$

۴) انتخاب یک عضو از $A_۰$ و سه عضو از $A_۲$:

$$\binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۳} = ۳ \times ۱ = ۳$$

بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با:

$$۱۸ + ۳۶ + ۱۲ + ۳ = ۶۹$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

A =

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

و

B =

a	*	*
*	a	×
*	×	a

اگر مربع داده شده در مسئله را A بنامیم،
فرض کنید B مربع لاتین متعامد با A و درایه سطر اول و ستون اول آن برابر a باشد که a یکی از اعداد ۱، ۲ و یا ۳ است. از آنجایی که دو مربع A و B متعامد هستند پس در مربع حاصل از ترکیب آنها هیچ عدد دو رقمی تکراری‌ای وجود ندارد، بنابراین درایه‌های مشخص شده با علامت × در مربع لاتین B نمی‌توانند برابر a باشند. از طرفی در هر سطر و ستون یک مربع لاتین عدد تکراری وجود ندارد، بنابراین درایه‌هایی که با علامت * مشخص شده‌اند نیز نمی‌توانند برابر a باشند. بنابراین ۳ عدد a تنها به یک حالت مشخص شده می‌توانند در جدول قرار بگیرند.

حال فرض کنید درایه سطر اول و ستون دوم مربع لاتین B برابر b باشد.

B =

a	b	
	a	b
b		a

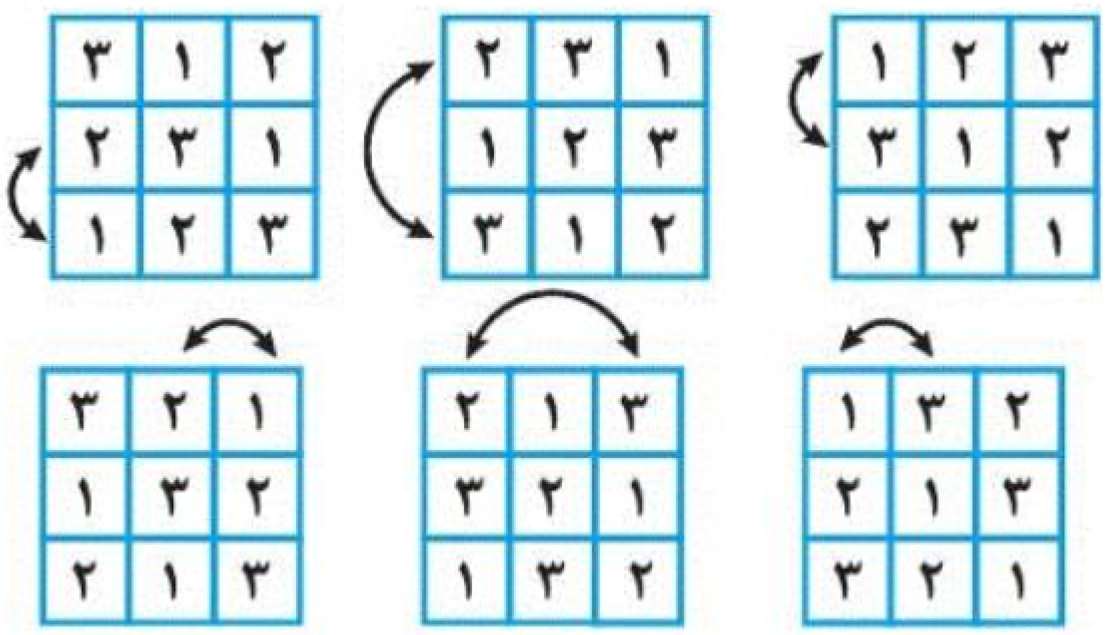
→ B =

a	b	c
c	a	b
b	c	a

با توجه به اینکه در هر سطر و ستون یک مربع لاتین هر عدد یک بار تکرار می‌شود، پس ۲ عدد b دیگر تنها به‌صورت نشان داده شده می‌توانند در جدول قرار بگیرند که در این حالت ارقام متناظر با ۳ رقم b در مربع لاتین A، ۳ رقم متمایز هستند، بنابراین متعامد بودن A و B حفظ می‌شود. حال ۳ خانه باقی‌مانده از مربع لاتین به عدد سوم تعلق دارند که با c نشان داده شده است. ارقام متناظر با ۳ رقم c نیز در مربع لاتین A، ۳ رقم متمایز هستند و بنابراین A و B متعامد هستند.

اعداد a، b و c، ۶ = !۳ حالت مختلف می‌توانند داشته باشند. پس تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع داده شده برابر ۶ است.

تذکر: برای هر مربع لاتین ۳ × ۳ دلخواه، ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد که این ۶ مربع را می‌توان با ثابت نگه داشتن یک سطر (یا ستون) در مربع لاتین اولیه و جابه‌جا کردن دو سطر (یا ستون) دیگر به‌دست آورد. برای مثال، مربع لاتین متعامد با مربع لاتین مسئله به‌صورت زیر هستند:



سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر تعداد شاخه‌های گل انتخاب شده از این ۴ نوع گل را با x_1، x_2، x_3 و x_4 نمایش دهیم، آنگاه تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ است که حاصل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه۲

اگر ۴ نوع گل را با متغیرهای x_1، x_2، x_3 و x_4 نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ x_i \geq 2 \ (1 \leq i \leq 4) \end{cases} \xrightarrow{x_i=y_i+2 \ (1\leq i\leq 4)} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 \\ y_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

$x_1 > 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3; \ y_1 \geq 1$

$2 \leq i \leq 4 : x_i \geq 1 \Rightarrow x_i = y_i; \ y_i \geq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$
$\Rightarrow (y_1 + 3) + y_2 + y_3 + y_4 + 2 = 12$
$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$

تعداد جواب‌های معادله صورت سؤال با شرایط داده شده برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله اخیر است، پس داریم:

$$\text{تعداد جواب ها} = \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$x_۱ > ۲ \Rightarrow x_۱ \geq ۳ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۳$$

$$x_۲ > ۳ \Rightarrow x_۲ \geq ۴ \Rightarrow x_۲ = y_۲ + ۴$$

با توجه به طبیعی بودن جواب‌های معادله، دو شرط $x_۳ = y_۳ + ۱$ و $x_۴ = y_۴ + ۱$ برقرار بوده و در نتیجه داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۳$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{۳+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = ۲۰$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

رقم یکان عدد مورد نظر لزوماً صفر است، پس تعداد اعداد مورد نظر برابر تعداد اعداد شش‌رقمی ساخته شده با ارقام ۰ ,۳ , ۳ , ۳ , ۵ , ۵ است. با توجه به این‌که صفر نمی‌تواند در اولین جایگاه سمت چپ عدد قرار گیرد، پس طبق قضیه جایگشت با تکرار، تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۵\times۵!}{۳!\ ۲!} = \frac{۵\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲} = ۵۰$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا جای ۲ها و ۱های باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم.

۱			۲
	۲	۱	
	۱	۲	
۲			۱

سطرهای اول و دوم به چهار طریق با ۳ و ۴ پر می‌شوند و سطرهای سوم و چهارم به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شوند.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

اگر $x_i = ۲k_i + ۱$ $(۱ \le i \le ۳)$ انتخاب شود، آنگاه داریم:

$$(۲k_۱ + ۱) + (۲k_۲ + ۱) + (۲k_۳ + ۱) = ۱۷$$
$$\Rightarrow ۲(k_۱ + k_۲ + k_۳) = ۱۴ \Rightarrow k_۱ + k_۲ + k_۳ = ۷$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله حاصل برابر است با:

$$\binom{۷ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

متغیر $x_۴$ حداکثر برابر ۳ است. از طرفی تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است، پس داریم:

حالت اول : $x_۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱$

تعداد جواب‌های طبیعی = $\binom{۱۱ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$

حالت دوم : $x_۴ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸$

تعداد جواب‌های طبیعی = $\binom{۸ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$

حالت سوم : $x_۴ = ۳ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳$

تعداد جواب‌های طبیعی = $\binom{۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۲}{۲} = ۱$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر است با:

$$۴۵ + ۲۱ + ۱ = ۶۷$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

تعداد روش‌های برنامه‌ریزی برای حل این مسئله، برابر تعداد مربع‌های لاتین مرتبه ۳ است. فرض کنید سطر اول مربع لاتین ۳ × ۳ به‌صورت

a	b	c

باشد (a، b و c جایگشتی از اعداد ۱، ۲ و ۳ است).

مطابق شکل، x برابر b یا c است، زیرا اعداد سطرها یا ستون‌ها نمی‌توانند تکراری باشند.

a	b	c
x		

با انتخاب هر کدام از مقادیر b یا c به‌جای x، مربع لاتین مورد نظر فقط به یک صورت منحصر به فرد پُر می‌شود.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

بنابراین با در نظر گرفتن جایگشت‌های سطر اول، تعداد مربع‌های لاتین مرتبه ۳، برابر است با: $۳! \times ۲ = ۶ \times ۲ = ۱۲$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در گزینه «۴»، مربع لاتین C از اعمال جایگشت $(۲ \to ۳, ۱ \to ۱, ۲ \to ۳)$ روی مربع لاتین A حاصل شده است. بنابراین در صورتی‌که A و B متعامد باشند، لزوماً B و C نیز متعامد هستند.

به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها، مربع لاتین

B =

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

را در نظر بگیرید که با مربع لاتین A و مربع لاتین گزینه «۴» متعامد است ولی با هیچ‌کدام از مربع‌های لاتین گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» متعامد نیست.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ی «۱»

ابتدا سه جایگاه شامل رقم یکان و دو رقم دیگر برای ارقام زوج ۲، ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است (دقت کنید که یکی از این سه جایگاه مربوط به رقم یکان است و فقط نیاز به انتخاب دو جایگاه دیگر داریم). سه رقم زوج در این سه جایگاه به دو حالت به صورت صعودی یا نزولی قرار می‌گیرند.

سه رقم دیگر برای ساختن عدد شش رقمی نیاز داریم که انتخاب آن‌ها به $\binom{۴}{۳}$ طریق امکان‌پذیر است و باید !۳ جایگشت سه رقم فرد انتخابی هم در نظر گرفته شود.

بنابراین تعداد اعداد موردنظر برابر است با:

$$\binom{۵}{۲} \times ۲ \times \binom{۴}{۳} \times ۳! = ۱۰ \times ۲ \times ۴ \times ۶ = ۴۸۰$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

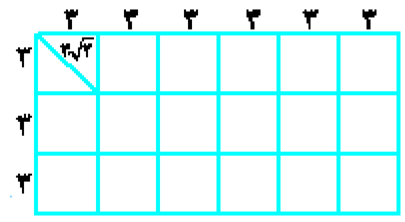
تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۶ عضوی. خودکار اول را به هر یک از ۶ نفر می‌توان اختصاص داد و برای خودکارهای بعدی، هر بار یک نفر از تعداد انتخاب‌ها کم می‌شود، پس تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با: $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

مطابق شکل اگر مستطیل را به ۱۸ مربع به طول ضلع ۳ تقسیم کنیم، آنگاه با انتخاب حداقل ۱۹ نقطه درون این مستطیل، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه از میان نقاط انتخابی وجود دارد که فاصله آنها کمتر از طول قطر مربع یعنی $۳\sqrt{۲}$ باشد.



سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه۱

فرض کنید S مجموعه اعداد سه رقمی و $A_۱$ و $A_۲$ زیر مجموعه‌هایی از S باشند که به‌ترتیب فاقد ۵ و فاقد ۲ هستند. در این‌صورت طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|S| = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$$

$$|A_۱| = |A_۲| = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = ۷ \times ۸ \times ۸ = ۴۴۸$$

$$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲|$$

$$= ۹۰۰ - (۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸) = ۵۲$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

روش اول: فرض کنید S مجموعه تمام توابع از مجموعه ۶ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی $B = \{a_۱, a_۲, a_۳\}$ باشد. اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ زیرمجموعه‌هایی از S باشند که برد آنها به‌ترتیب فاقد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ هستند، آنگاه داریم:

$$|S| = ۳^۶$$

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۶$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲|$$

$$-|A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$

$$= ۳ \times ۲^۶ - ۳ \times ۱ + ۰ = ۱۹۲ - ۳ = ۱۸۹$$

$$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$$

$$= ۷۲۹ - ۱۸۹ = ۵۴۰$$

روش دوم: طبق متن صفحه ۷۸ کتاب ریاضیات گسسته تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ با فرض $|A| = m \geq ۳$ و $|B| = ۳$، از رابطه $۳^m - (۳ \times ۲^m - ۳)$ به‌دست می‌آید. با فرض $m = ۶$ داریم:

$$\text{تعداد توابع پوشا} = ۳^۶ - (۳ \times ۲^۶ - ۳) = ۷۲۹ - (۱۹۲ - ۳) = ۵۴۰$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

تعداد یال‌های گراف کامل $K_{۱۶}$ برابر است با: $\frac{۱۶ \times ۱۵}{۲} = ۱۲۰$

اگر ۱۲۰ یال را معادل ۱۲۰ کبوتر و ۷ رنگ موجود را معادل ۷ لانه کبوتر فرض کنیم، آنگاه چون $۱۷ \times ۷ + ۱ = ۱۲۰$ است، پس حداقل $۱۷ + ۱ = ۱۸$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی مطمئناً حداقل ۱۸ یال در این گراف هم‌رنگ هستند.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید S مجموعه تمام اعداد طبیعی سه‌رقمی و A، B و C به‌ترتیب مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی شامل ۱، ۲ و ۳ باشند. در این صورت داریم:

$$|A \cup B \cup C| = |S| - \left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |S| - |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}|$$

$$= ۹ \times ۱۰^{۲} - ۶ \times ۷^{۲} = ۹۰۰ - ۲۹۴ = ۶۰۶$$

تذکر: مجموعه $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ شامل اعداد طبیعی سه‌رقمی‌ای است که فاقد ۱، ۲ و ۳ می‌باشند.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر مجموعه بازیکنان فوتبال، والیبال و بسکتبال را به‌ترتیب با A، B و C نمایش دهیم، آنگاه طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$$

$$- |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\Rightarrow ۲۸ = ۱۸ + ۱۴ + ۱۰ - ۶ - ۵ - ۴ + |A \cap B \cap C|$$

$$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = ۱$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر مجموعه حالت‌هایی که به‌ترتیب حروف T، R و N سر جای خود قرار دارند را با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|S| = ۶! = ۷۲۰$$

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۵! = ۱۲۰$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۴! = ۲۴$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۳! = ۶$$

مجموعه حالت‌هایی که هیچ‌کدام از سه حرف T، R و N سر جای خود قرار نداشته باشند، معادل مجموعه $\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}$ است که طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۳ \times ۱۲۰ - ۳ \times ۲۴ + ۶ = ۲۹۴$$

$$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$$

$$= ۷۲۰ - ۲۹۴ = ۴۲۶$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که کوچک‌تر از ۳۵ هستند، برابر است با $A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۷, ۳۰, ۳۳\}$. حال عدد ۳۳ را از A کنار می‌گذاریم، در این‌صورت مجموع جفت عددهای $\{۳, ۳۰\}$، $\{۶, ۲۷\}$، $\{۹, ۲۴\}$، $\{۱۲, ۲۱\}$، $\{۱۵, ۱۸\}$ برابر ۳۳ است. اکنون اگر از هر کدام از این جفت اعداد، فقط یکی را انتخاب کنیم و عدد ۳۳ را به آنها اضافه نماییم، آنگاه با انتخاب هر کدام از عضوهای باقی‌مانده در بین جفت اعداد مورد نظر، به‌طور حتم یکی از جفت اعداد با مجموع ۳۳ وجود خواهد داشت. پس کم‌ترین تعداد عضوهای زیر مجموعه‌های k عضوی باید برابر با $۶ + ۱ = ۷$ باشد.

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

اگر در هر یک از کیسه‌ها ۶ مهره (۲ مهره از هر رنگ) داشته باشیم، هدف مسئله برآورده نشده است، اما با اضافه کردن مهره بعدی (مهره سیزدهم)، قطعاً در یکی از دو کیسه، حداقل ۳ مهره هم‌رنگ وجود دارد.

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $f = \{(۱, \square), (۲, \square), (۳, \square), (۴, d)\}$

چون تعداد اعضای A و B برابر یکدیگر است، پس هر تابع پوشا از A به B، لزوماً یک‌به‌یک نیز می‌باشد. با توجه به وجود زوج مرتب $(۴, d)$ در این تابع، کافی است تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ به $\{a, b, c\}$ را به‌دست آورده و توابعی که شامل زوج مرتب $(۳, b)$ هستند را از آنها کم کنیم. تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر $۳! = ۶$ است. توابعی که

شامل زوج مرتب $(۳, b)$ هستند، عبارت‌اند از: $f_۱ = \{(۱, a), (۲, c), (۳, b)\}$

$f_۲ = \{(۲, a), (۱, c), (۳, b)\}$

پس به تعداد $۶ - ۲ = ۴$ تابع پوشا از A به B می‌توان تعریف کرد که شامل $(۴, d)$ و فاقد $(۳, b)$ باشد.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

اگر A و B مجموعه گراف‌هایی با رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ باشند که به‌ترتیب رئوس a و b در آنها رأس تنها هستند، آنگاه داریم:

$$\left|\bar{A} \cap \bar{B}\right| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$= ۲^{\binom{۵}{۲}} - ۲^{\binom{۴}{۲}} - ۲^{\binom{۴}{۲}} + ۲^{\binom{۳}{۲}} = ۱۰۲۴ - ۶۴ - ۶۴ + ۸ = ۹۰۴$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

طبق اصل لانه کبوتری در بدترین حالت این امکان وجود دارد که هر ۱۰ نفر دارای دقیقاً ۳۵۰ سکه باشند که این حالت مستلزم آن است که هر نفر ۷ بار انتخاب شده باشد که روی هم می‌شود $10 \times 7 = 70$ انتخاب.

اما چون در هر مرحله ۴ نفر انتخاب می‌شوند، پس در بدترین حالت طبق اصل لانه کبوتری می‌توان ۱۷ بار این عمل را تکرار کرد. در هجدهمین دور انتخاب افراد $(18 \times 4 > 70)$ ، حتماً فردی وجود خواهد داشت که برای بار هشتم انتخاب شده باشد و در نتیجه حداقل ۴۰۰ سکه به او رسیده است.

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۴

اعداد دو رقمی مضرب ۳ عبارت‌اند از ۱۲، ۱۵، ۱۸، ... ، ۹۶ و ۹۹، که در مجموع ۳۰ عدد هستند.
حالت‌هایی که مجموع دو عدد از میان این اعداد برابر ۹۶ است، عبارت‌اند از (۱۲,۸۴)، (۱۵,۸۱)، ... و (۴۵,۵۱) که شامل ۱۲ گروه است. همچنین اعداد ۴۸، ۸۷، ۹۰، ۹۳، ۹۶ و ۹۹ در هیچ گروهی نیستند.
در بدترین حالت از هر گروه یک عضو و تمام اعداد بدون گروه را انتخاب می‌کنیم (روی هم $12 + 6 = 18$ عضو) و در انتخاب نوزدهم مطمئن هستیم که قطعاً دو عدد با مجموع ۹۶ وجود دارد.

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۳

اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که به‌ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، آنگاه داریم:

$$|A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)|$$

$$= |A| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

$$= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] - \left[\frac{100}{10}\right] + \left[\frac{100}{30}\right] = 50 - 16 - 10 + 3 = 27$$