مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه ۳ فصل۱ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

① اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۴ **۲)** -۴ **۳)** ۰ **۴)** ۲

② اگر $A_{۳\times۳}$ ماتریسی اسکالر، $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریسAB برابر ۱۲ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریسA کدام است؟

۱) ۳ **۲)** ۶ **۳)** ۹ **۴)** ۱۲

③ اگر $۲A+B=I$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۱ **۳)** صفر **۴)** -۱

④ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} a & b \\ ۵ & -۲ \\ -b & a+۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB، ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

۱) ۴ **۲)** ۶ **۳)** ۸ **۴)** ۱۲

⑤ از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$، عدد غیرصفر x، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ **۲)** $\frac{۳}{۸}$ **۳)** $\frac{۴}{۹}$ **۴)** $\frac{۳}{۵}$

⑥ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $C=A^۲+B^۲+AB$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۳۱ **۳)** ۹۱ **۴)** ۱۰۱

⑦ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) -۱۲۸ **۲)** ۱۲۸
۳) -۶۴ **۴)** ۶۴

⑧ اگرα و β ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & x & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & x & -۱ \\ x & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۴ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=۰$ باشند($|\alpha|<|\beta|$)، آنگاه حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ **۲)** $-\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ **۴)** $-\frac{۲}{۳}$

۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & a-۱\\ a+۱ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -b\\ b & ۲\end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- **۲)** صفر **۳)** ۱ **۴)** ۲

۱۰) اگر $A^۲=\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$، $B^۲=\begin{bmatrix}۱ & -۱۶\\ ۰ & ۹\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۲ & -۶\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۶ & -۱۶\\ ۸ & -۲\end{bmatrix}$ **۲)** $\begin{bmatrix}۶ & -۱۶\\ ۸ & ۲\end{bmatrix}$ **۳)** $\begin{bmatrix}-۶ & ۱۶\\ -۸ & -۲\end{bmatrix}$ **۴)** $\begin{bmatrix}۶ & ۱۶\\ -۸ & ۲\end{bmatrix}$

۱۱) اگر $A^۲-۲A=I$ باشد، آنگاه $A^۴-۵I$ کدام است؟

۱) $۱۰A-I$ **۲)** $۱۲A-I$ **۳)** $۱۲A$ **۴)** $۱۰A$

۱۲) اگر مجموع درایه های ماتریس مربعی A برابر (۲-) و $(A+I)^۲=I$ باشد، آنگاه مجموع درایه های ماتریس $A^۶$ کدام است؟

۱) ۳۲- **۲)** ۶۴-
۳) ۳۲ **۴)** ۶۴

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $\alpha A-\beta I=A^{-۱}$ باشد، آنگاه حاصل $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۳- **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۴-

۱۴) اگر $(I-A)^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $۵A^۲$ کدام است؟

۱) ۴ **۲)** $\frac{۴}{۵}$ **۳)** ۱۶ **۴)** $\frac{۱۶}{۵}$

۱۵) اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و $A^۲+۲A=۳I$ باشد، حاصل دترمینان ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) ۲ **۲)** ۲±
۳) ۴ **۴)** ۴±

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴a-۱ & -۱۴\\ ۵ & a-۱۰\end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر a، ماتریس $۳A^{-۱}+B$ وارون پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۷و۱۱ **۲)** ۳و۴ **۳)** ۳و۷ **۴)** ۴و۱۱

۱۷) اگر $\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}$ ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$، آنگاه مقدار β کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ **۲)** $-\frac{۱}{۵}$ **۳)** $\frac{۲}{۵}$ **۴)** $\frac{۴}{۵}$

۱۸) از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) $[۱۲\ \ -۱۷]$ **۲)** $[-۲۱\ \ ۳۰]$ **۳)** $[-۱۷\ \ ۳۰]$ **۴)** $[۱۲\ \ -۲۱]$

۱۹) معادلهٔ $\begin{vmatrix}۱ & x & x\\ ۱ & x^۲ & x\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=۰$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۳

(۲۰) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & |A| \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|\,|A|A^{-1}|$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۶۴

(۲۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادله $AX = A^{-1}$، باشد ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۴ & -۳۲ \\ -۲۵ & ۴۸ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} -۱۴ & ۳۲ \\ ۲۵ & -۵۶ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} -۷ & ۱۶ \\ ۲۱ & -۲۸ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۷ & ۱۶ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$

(۲۲) اگر دترمینان دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۳ \\ -۲+b & ۱+a & k \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ & k \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، کدام رابطهٔ زیر همواره صحیح است؟

۱) $a - b = ۰$
۲) $a + b = ۱$
۳) $a + b = ۰$
۴) $a - b = ۱$

(۲۳) اگر $A^۲ = ۴A - ۳I$ و $A^{-1} = mA + nI$ باشد، حاصل m+n کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

(۲۴) اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر و $A^۳ = ۳A^۲ - ۲A$ باشد، ماتریس $A^۴$ برابر کدام است؟

۱) $۱۴A + ۱۵I$
۲) $۱۴A - ۱۵I$
۳) $۱۵A + ۱۴I$
۴) $۱۵A - ۱۴I$

(۲۵) اگر $(A - ۲I)^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های ستون دوم ماتریس $A(A - ۲I)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۹
۳) ۵
۴) ۱۶

(۲۶) اگر $A^۲ = ۴A - ۳I$ و $A^{-1} = mA + nI$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

(۲۷) اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - ۳y = ۱ \\ ۲۰x + by = ۵ \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه معادلات، جواب منحصربه‌فرد دارد؟

۱) $\begin{cases} ۱۵x - ۴y = ۱ \\ bx + ay = ۳ \end{cases}$
۲) $\begin{cases} ax - ۱۵y = ۱ \\ ۴x + by = ۵ \end{cases}$
۳) $\begin{cases} ax + ۱۵y = ۵ \\ bx + ay = ۳ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} ax + by = ۲ \\ ۳ax + ۳by = ۵ \end{cases}$

۲۸) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و داشته باشیم $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر لزوماً برقرار است؟

۱) $A=B^{-1}$
۲) $B=A^{-1}BA$
۳) $A=A^{-1}BA$
۴) $A=B$

۲۹) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳|A| \\ ۲|A| & ۵ \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس A و وارون آن برابر نباشند، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۱
۲) $\frac{۱۱}{۶}$
۳) $\frac{۶۱}{۶}$
۴) ۱

۳۰) در یک دستگاه معادلات خطی، $A=\begin{bmatrix} |A|-۲ & |A|+۱ \\ |A|-۱ & ۲|A|-۱ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم آن است. اگر درایه‌های ماتریس A همگی مثبت باشند، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس مجهولات کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳-
۳) ۹
۴) ۹-

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه ۳ فصل۱ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$AB \text{ سطر دوم } = A \text{ سطر دوم } \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ABC درایهٔ سطر دوم و ستون سوم= (ABسطر دوم)×(Cستون سوم)

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۴$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ $(a \in R)$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۲a & -۳a \\ ۳a & a & ۲a \\ -a & -۳a & ۲a \end{bmatrix}$$

$$AB \text{ مجموع درایه‌های } = ۴a \Rightarrow ۴a = ۱۲ \Rightarrow a = ۳$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های } = ۳a = ۳ \times ۳ = ۹$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} ۲A + B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} ۳A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A + B = (۲A + B) - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس A+B، برابر صفر است.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ ۵ & -۲ \\ -b & a+۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + ۱۰ + ۲b & b - ۴ - ۲a - ۲ \\ -a + ۱۵ - ۴b & -b - ۶ + ۴a + ۴ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + ۲b + ۱۰ & b - ۲a - ۶ \\ -a - ۴b + ۱۵ & ۴a - b - ۲ \end{bmatrix}$$

چون ماتریس AB، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های خارج قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} b - ۲a - ۶ = ۰ \\ -a - ۴b + ۱۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a + b = ۶ \\ a + ۴b = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۴ \end{cases}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۵ & -۲ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۱۰ & ۱۸ \\ ۷ & ۴ & -۱۸ \\ -۴ & -۸ & ۸ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های BA = ۱۲

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینه۱

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۱x - ۱ & -x - ۲ & -۳x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۱x^۲ - x - ۲x^۲ - ۴x + ۳x = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ - ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow x(۹x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۲}{۹} \end{cases}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & -۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۳\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}=۲I$$

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۳\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & -۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+B^{۲}+BA+AB\Rightarrow C=A^{۲}+B^{۲}+AB$$

$$=(A+B)^{۲}-BA=(۲I)^{۲}-BA\Rightarrow C=۴I-I=۳I$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}=-۴I$$

$$A^{۱۲}=\left(A^{۴}\right)^{۳}=(-۴I)^{۳}=-۶۴I=\begin{bmatrix}-۶۴ & ۰\\ ۰ & -۶۴\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}$، برابر (۱۲۸−) است.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

$$[۱ \quad x \quad ۲]\begin{bmatrix}۳ & x & -۱\\ x & ۱ & ۲\\ -۲ & -۴ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow [x^{۲}-۱ \quad ۲x-۸ \quad ۴x-۱]\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow [x^{۲}-۱-۲x+۸+۸x-۲]=۰\Rightarrow x^{۲}+۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x+۵)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-۱=\alpha\\ a=-۵=\beta\end{cases}\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{۱}{۵}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & a-۱ \\ a+۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -b \\ b & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲+ab-b & -۲b+۲a-۲ \\ a+۱+۳b & -ab-b+۶ \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -۲b+۲a-۲=۰ \\ a+۱+۳b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۲b=۲ \\ a+۳b=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۱}{۲} \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a+b=۰$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

$$(A+B)^{۲} = A^{۲}+AB+BA+B^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} + AB+BA+\begin{bmatrix} ۱ & -۱۶ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -۸ & -۳۶ \\ ۱۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۲۰ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} + AB+BA$$

$$\Rightarrow AB+BA = \begin{bmatrix} -۸ & -۳۶ \\ ۱۲ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & -۲۰ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۶ \\ ۸ & -۲ \end{bmatrix}$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$A^{۲}-۲A=I \Rightarrow A^{۲}=۲A+I \Rightarrow (A^{۲})^{۲}=(۲A+I)^{۲}$$

$$\Rightarrow A^{۴}=۴A^{۲}+۴AI+I^{۲} \Rightarrow A^{۴}=۴(۲A+I)+۴A+I$$

$$=۱۲A+۵I \Rightarrow A^{۴}-۵I=۱۲A$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

$$(A+I)^{۲}=I \Rightarrow A^{۲}+۲AI+I^{۲}=I \Rightarrow A^{۲}+۲A+I=I$$

$$\Rightarrow A^{۲}=-۲A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^{۴}=(-۲A)^{۲}=۴A^{۲}$$

$$\xrightarrow{\times A^{۲}} A^{۶}=۴A^{۴}=۴(۴A^{۲})$$

$$\Rightarrow A^{۶}=۱۶A^{۲}=۱۶(-۲A)=-۳۲A$$

$$\text{مجموع درایه های } A^{۶} = -۳۲\times(-۲)=۶۴$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳ \times ۴ - (-۲) \times (-۵) = ۲$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ \frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به معادله داده شده داریم:

$$\alpha A - \beta I = A^{-۱} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳\alpha & -۲\alpha \\ -۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ \frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳\alpha - \beta & -۲\alpha \\ -۵\alpha & ۴\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ \frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۲} \\ ۳\alpha - \beta = ۲ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} - \beta = ۲ \Rightarrow \beta = -\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

$$\alpha - \beta = -\frac{۱}{۲} + \frac{۷}{۲} = ۳$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

از طرفین رابطه وارون می‌گیریم:

$$\left[(I - A)^{-۱}\right]^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}$$

$$I - A = \frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۴}{۵} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۱}{۵} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۸+۲}{۲۵} = \frac{۱۰}{۲۵} = \frac{۲}{۵}$$

$$\left|۵A^{۲}\right| = ۲۵|A|^{۲} = ۲۵\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲} = ۴$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$A^{۲} + ۲A = ۳I \Rightarrow A^{۲} + ۲A + I = ۴I$$

$$\Rightarrow (A + I)^{۲} = ۴I$$

$$\Rightarrow |(A + I)^{۲}| = |۴I|$$

$$\Rightarrow |(A + I)|^{۲} = ۴^{۲}$$

$$\Rightarrow |A + I| = \pm ۴$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۳\times۷-۶\times۴}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow ۳A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A^{-۱} + B = \begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴a - ۱ & -۱۴ \\ ۵ & a - ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴a - ۸ & -۸ \\ ۹ & a - ۱۳ \end{bmatrix}$$

شرط اینکه ماتریس $۳A^{-۱} + B$ وارون پذیر نباشد، آن است که دترمینان آن برابر صفر شود، بنابراین داریم:

$$|۳A^{-۱} + B| = ۰ \Rightarrow (۴a - ۸)(a - ۱۳) - (-۸) \times ۹ = ۰$$
$$\Rightarrow ۴a^{۲} - ۵۲a - ۸a + ۱۰۴ + ۷۲ = ۰ \Rightarrow ۴a^{۲} - ۶۰a + ۱۷۶ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۴} a^{۲} - ۱۵a + ۴۴ = ۰ \Rightarrow (a - ۴)(a - ۱۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ a = ۱۱ \end{cases}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۲(-۴)-(-۱)\times۳}\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-۱} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲\alpha & -\alpha \\ ۳\alpha & -۴\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲\alpha + \beta & -\alpha \\ ۳\alpha & -۴\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۵} \\ ۲\alpha + \beta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵} + \beta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \beta = \frac{۲}{۵} \end{cases}$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

با فرض $B=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ معادلهٔ مفروض سؤال به‌صورت BAC=D، خواهد بود. برای یافتن ماتریس A، طرفین این معادله را از راست در $C^{-۱}$ و از چپ در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow (B^{-۱}B)A(CC^{-۱}) = B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$\Rightarrow IAI = B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$\xrightarrow{IA=AI=A} A = B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$C=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow C^{-۱} = \frac{۱}{۵-۶}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}\frac{-۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}-۳ & ۳\\ ... & ...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱۲ & -۲۱\\ ... & ...\end{bmatrix}$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با استفاده از دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$\begin{vmatrix}۱ & x & x\\ ۱ & x^۲ & x\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (x^۲+x^۲+x)-(x^۳+x+x) = ۰$$

$$\Rightarrow -x^۳+۲x^۲-x = ۰ \Rightarrow -x(x^۲-۲x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow -x(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases}x = ۰\\ (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است.

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ((۲))

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = ۴|A| - ۱۲ \Rightarrow ۳|A| = ۱۲ \Rightarrow |A| = ۴$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۴}$$

ماتریس A^{-1} ماتریسی ۲ × ۲ است، بنابراین داریم:

$$\left||A|A^{-1}\right| = \left|۴A^{-1}\right| = ۴^۲ \times \left|A^{-1}\right| = ۱۶ \times \frac{۱}{۴} = ۴$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{۱}{-\frac{۱}{۴}} \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$AX = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1} \times A^{-1}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۲ & -۱۴ \\ -۵۶ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۳

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ k & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (-۳ + ۰ + ۴k) - (۰ - ۶ - ۲k) = ۰ \Rightarrow ۶k + ۳ = ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ k & ۱ + a & -۲ + b \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow [-۳(۱ + a) + ۰ + ۴k] - [۰ + ۳(-۲ + b) - ۲k] = ۰$$

$$\Rightarrow (-۳ - ۳a + ۴k) - (-۶ + ۳b - ۲k) = ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{۶k + ۳}_{۰} - ۳(a + b) = ۰ \Rightarrow -۳(a + b) = ۰ \Rightarrow a + b = ۰$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول:

$$A^۲ = ۴A - ۳I \Rightarrow A^۲ - ۴A = -۳I \Rightarrow A(A - ۴I) = -۳I$$
$$\Rightarrow -\tfrac{۱}{۳}A(A - ۴I) = I \Rightarrow A^{-۱} = -\tfrac{۱}{۳}(A - ۴I)$$

طبق فرض:
$$A^{-۱} = mA + nI \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۱}{۳} \\ n = \frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow m + n = -\tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۴}{۳} = ۱$$

راه حل دوم:

$$A^{-۱} = mA + nI \xrightarrow{\times A} A^{-۱}A = mA^۲ + nIA \Rightarrow I = mA^۲ + nA$$
$$A^۲ = ۴A - ۳I \Rightarrow ۳I = ۴A - A^۲ \Rightarrow I = -\tfrac{۱}{۳}A^۲ + \tfrac{۴}{۳}A$$
$$\Rightarrow m = -\tfrac{۱}{۳},\ n = \tfrac{۴}{۳} \Rightarrow m + n = -\tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۴}{۳} = ۱$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ماتریس A وارون‌پذیر است، پس ماتریس $A^{-۱}$ وجود دارد و در نتیجه داریم:

$$A^۳ = ۳A^۲ - ۲A \xrightarrow{\times A^{-۱}} A^{-۱}A^۳ = ۳A^{-۱}A^۲ - ۲A^{-۱}A$$
$$\xrightarrow{A^{-۱}A = I} A^۲ = ۳A - ۲I$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^۴ = (۳A - ۲I)^۲ = ۹A^۲ - ۱۲A + ۴I$$
$$\Rightarrow A^۴ = ۹(۳A - ۲I) - ۱۲A + ۴I = ۱۵A - ۱۴I$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

$$(A - ۲I)(A - ۱I)^{-۱} = I$$
$$\Rightarrow A(A - ۲I)^{-۱} - ۲I(A - ۲I)^{-۱} = I$$
$$\Rightarrow A(A - ۲I)^{-۱} = I + ۲(A - ۲I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A(A - ۲I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه های ستون دوم $= ۲ + ۳ = ۵$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول:

$$A^{۲} = ۴A - ۳I \Rightarrow A^{۲} - ۴A = -۳I \Rightarrow A(A - ۴I) = -۳I$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}A(A - ۴I) = I \Rightarrow A^{-۱} = -\frac{۱}{۳}(A - ۴I)$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}A + \frac{۴}{۳}I = mA + nI \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۱}{۳} \\ n = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۱$$

راه حل دوم:

$$A^{-۱} = mA + nI \xrightarrow{\times A} A^{-۱}A = mA^{۲} + nIA$$

$$\Rightarrow I = mA^{۲} + nA(۱)$$

$$A^{۲} = ۴A - ۳I \Rightarrow ۳I = ۴A - A^{۲} \Rightarrow I = -\frac{۱}{۳}A^{۲} + \frac{۴}{۳}A \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow m = -\frac{۱}{۳} \text{ و } n = \frac{۴}{۳} \Rightarrow m + n = -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} = ۱$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

برای آنکه دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دو خط $ax - ۳y = ۱$ و $۲۰x + by = ۵$ بر هم منطبق باشند:

$$\frac{a}{۲۰} = \frac{-۳}{b} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = -۱۵ \end{cases}$$

حال بین گزینه‌ها، دستگاه معادلاتی را انتخاب می‌کنیم که دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر باشد تا جواب منحصربه‌فرد داشته باشد.

$$۱)\ \begin{vmatrix} ۱۵ & -۴ \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱۵ & -۴ \\ -۱۵ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

$$۲)\ \begin{vmatrix} a & -۱۵ \\ ۴ & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & -۱۵ \\ ۴ & -۱۵ \end{vmatrix} = ۰$$

$$۳)\ \begin{vmatrix} a & ۱۵ \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۱۵ \\ -۱۵ & ۴ \end{vmatrix} \neq ۰$$

$$۴)\ \begin{vmatrix} a & b \\ ۳a & ۳b \end{vmatrix} = ۰$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$(A+B)(A-B)=A^{۲}-AB+BA-B^{۲}=A^{۲}-B^{۲}$$

$$\Rightarrow AB=BA\xrightarrow{\times A^{-۱}}A^{-۱}(AB)=A^{-۱}(BA)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-۱}A)}_{I}B=A^{-۱}BA\Rightarrow B=A^{-۱}BA$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۲

$$|A|=۳|A|\times ۲|A|-۱\times ۵\Rightarrow ۶|A|^{۲}-|A|-۵=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=-\frac{۵}{۶}\end{cases}$$

دترمینان ماتریس A و وارون آن برابر نیستند، بنابراین داریم:

$$|A|\neq|A^{-۱}|\Rightarrow|A|\neq\frac{۱}{|A|}\Rightarrow|A|^{۲}\neq۱\Rightarrow|A|\neq\pm۱$$

بنابراین تنها مقدار $|A|=-\frac{۵}{۶}$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A=۵|A|+۶=۵(-\frac{۵}{۶})+۶=-\frac{۲۵}{۶}+۶=\frac{۱۱}{۶}$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۲

دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=(|A|+۱)(|A|-۱)-(۲|A|-۱)(|A|-۲)$$

$$\Rightarrow(|A|)^{۲}-۴|A|+۳=۰$$

$$\Rightarrow(|A|-۱)(|A|-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=۳\end{cases}$$

(قابل قبول نیست چون یکی از درایه‌ها منفی است) $|A|=۱\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$

$$|A|=۳\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$$

حال ماتریس مجهولات را به‌دست می‌آوریم:

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۴\\ -۱۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۳}\\ -\frac{۱۳}{۳}\end{bmatrix}$$

$$x+y=\frac{۴}{۳}-\frac{۱۳}{۳}=-\frac{۹}{۳}=-۳$$

مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۲ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

① پاره‌خط AB به طول ۸ واحد در صفحه مختصات به گونه‌ای است که همواره دو سر آن بر روی محورهای مختصات است. بیشترین فاصله نقطه M (۳,۴) از نقاط وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۵ **۲)** ۸ **۳)** ۹ **۴)** ۶

② اگر صفحه P از رأس یک سطح مخروطی عبور کند، به‌طوری که شامل مولد نیز باشد، سطح مقطع حاصل از این برخورد کدام است؟

۱) سهمی **۲)** بیضی
۳) دو خط متقاطع **۴)** یک خط

③ نقاط A، B و C در یک صفحه واقع‌اند به‌طوری که طول پاره‌خط AB برابر ۶ سانتی‌متر است. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، مثلث ABC لزوماً چه نوع مثلثی است؟

۱) متساوی‌الساقین **۲)** متساوی‌الاضلاع
۳) قائم الزاویه **۴)** قائم الزاویه متساوی الساقین

④ صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی هر دو نیمه بالایی و پایینی آن را برش می‌دهد. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام است؟

۱) هذلولی **۲)** دو خط متقاطع
۳) سهمی **۴)** یک خط راست

⑤ در کدام یک از چهارضلعی‌های زیر، مکان هندسی نقاطی از صفحه که از تمامی اضلاع آن چهارضلعی به یک فاصله هستند، همواره غیرتهی است؟

۱) مستطیل **۲)** متوازی‌الاضلاع
۳) ذوزنقه متساوی‌الساقین **۴)** کایت

⑥ مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی که نقطه مفروض P را به نقاط مختلف یک دایره وصل می‌کنند، کدام است؟ (نقطه P خارج دایره است.)

۱) دو خط **۲)** یک نیم دایره
۳) یک بیضی **۴)** یک دایره

⑦ مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ (۲,۴−)A، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ B(۱,۳) باشد، کدام است ؟

۱) دایره‌ای به مرکز (۵,۵−) و شعاع $۲\sqrt{۵}$ **۲)** دایره‌ای به مرکز (۵,−۵) و شعاع $۲\sqrt{۵}$
۳) دایره‌ای به مرکز (۵,۵−) و شعاع $۴\sqrt{۵}$ **۴)** دایره‌ای به مرکز (۵,−۵) و شعاع $۴\sqrt{۵}$

۸) بیشترین فاصلهٔ نقطه $A(4,5)$ از دایره‌ای به مرکز $O(1,1)$، $\frac{3}{2}$ برابر کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از همان دایره است. وضعیت این دایره نسبت به محورهای مختصات چگونه است؟ (نقطهٔ A خارج دایره است.)

۱) بر محور xها مماس است.
۲) بر محور yها مماس است.
۳) بر هر دو محور x و y مماس است.
۴) هر دو محور x و y را قطع می‌کند.

۹) شعاع دایره‌ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیه چهارم باشد و از $A(0,2)$ بگذرد و بر خط $y = 3x + 6$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{10}$ **۲)** $\sqrt{5}$
۳) $2\sqrt{5}$ **۴)** $\sqrt{10}$

۱۰) به ازای کدام مقدار k، شعاع دایرهٔ $x^2 + my^2 - 2x + 4y + k = 0$ برابر ۳ است؟

۱) ۴- **۲)** ۲- **۳)** ۲ **۴)** ۴

۱۱) دایره‌ای از دو نقطه $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ **۲)** ۲ **۳)** $\sqrt{5}$ **۴)** ۳

۱۲) کدام‌یک از معادلات زیر مربوط به یک دایره است؟

۱) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$ **۲)** $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
۳) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ **۴)** $2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y + 2 = 0$

۱۳) به ازای کدام مقدار m، دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2x + 4y + m = 0$، روی خط $x + 2y + 10 = 0$، وتری به طول ۴ جدا می‌کند؟

۱) ۴ **۲)** ۲
۳) ۲- **۴)** ۴-

۱۴) به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ $x^2 + y^2 + mx + (m+1)y + m = 0$، تنها یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند؟

۱) هر مقدار m **۲)** هیچ مقدار m
۳) $m = \frac{1}{2}$ **۴)** $m = 1$

۱۵) خط به معادله $3x - 4y + 7 = 0$، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ را در نقاط A و B قطع کرده است. طول وتر AB کدام است؟

۱) $\frac{6}{5}$ **۲)** $\frac{8}{5}$
۳) $\frac{12}{5}$ **۴)** $\frac{16}{5}$

۱۶) دایره‌ای از نقاط $A(1,1)$ و $B(-2,-2)$ گذشته و خط $y = x + 3$ شامل قطری از آن است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۲ **۲)** $\sqrt{6}$ **۳)** $2\sqrt{2}$ **۴)** ۳

۱۷) دایره $x^2 + y^2 - 4x + my + n = 0$ بر دو خط $y = x - 7$ و $y = x + 1$ مماس است. حاصل $m + n$ کدام است؟

۱) ۱- **۲)** ۲
۳) ۳ **۴)** ۵

۱۸) به‌ازای کدام مقدار m، دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2(m-1)x + 2my + 4m - 3 = 0$ بر محور yها مماس است؟

۱) ۱ **۲)** ۳
۳) ۱- **۴)** ۲

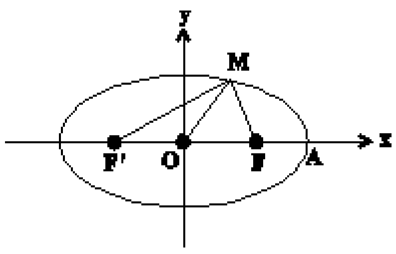
۱۹) وضعیت نسبی دو دایرهٔ $C_1 : x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $C_2 : x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ کدام است؟

۱) متخارج **۲)** متقاطع **۳)** مماس داخل **۴)** مماس خارج

۲۰) به ازای کدام مقدار m، دو دایرهٔ $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ و $C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 8y - m = 0$ مماس خارج هستند؟

۱) ۲۱- **۲)** ۱۶- **۳)** ۹- **۴)** صفر

۲۱) در بیضی شکل زیر، اگر $MO = OF'$ و $AF = 1$ و خروج از مرکز $e = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $MF . MF'$ کدام است؟

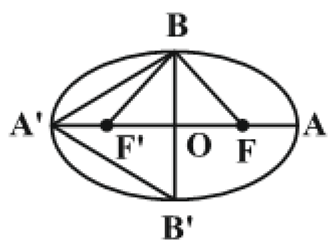


۱) ۱۲ **۲)** ۱۸
۳) ۲۴ **۴)** ۳۶

۲۲) کدام یک از معادلات زیر به یک سهمی تعلق دارد که دهانه آن رو به چپ است؟

۱) $y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ **۲)** $y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$
۳) $x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$ **۴)** $x^2 + 2y - 2x + 4 = 0$

۲۳) در شکل زیر F و F' کانون های یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{5}{8}$ هستند. نسبت مساحت مثلث BFF' به مساحت مثلث $A'BB'$ کدام است؟



۱) $\frac{5}{8}$ **۲)** $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{3}{5}$ **۴)** ۱

۲۴) اگر $F(1,-2)$ کانون سهمی $x^2 + 16y - 2x + m = 0$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۳۳ **۲)** ۳۱
۳) ۳۳- **۴)** ۳۱-

۲۵) به ازای کدام مقدار m، کانون سهمی به معادله $y^2 + 8y - 4x = m$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار دارد؟

۱) ۴ **۲)** ۱۲ **۳)** ۴- **۴)** ۱۲-

۲۶) جدارهٔ پشت لامپ چراغ جلوی اتومبیلی از جنس آینه و به صورت یک سهمی به معادلهٔ $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$ است. لامپ را در چه نقطه‌ای قرار دهیم تا شعاع‌های نور موازی با هم خارج شوند؟

۱) $(3,2)$ **۲)** $(2,3)$ **۳)** $(1,4)$ **۴)** $(0,5)$

۲۷) سهمی به معادلهٔ $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. اگر دایره‌ای به مرکز کانون این سهمی و به شعاع ۲ رسم کنیم، طول نقاط برخورد سهمی و دایره کدام است؟

۱) فقط $-\frac{1}{2}$ **۲)** $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{9}{2}$ **۳)** فقط $\frac{1}{2}$ **۴)** $\frac{1}{2}$ و $\frac{9}{2}$

۲۸) نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۱۲ هستند. مساحت ناحیه بین دو دایره یکی به قطر AA' و دیگری به قطر FF' کدام است؟

۱) ۹π **۲)** ۳۶π **۳)** ۸۱π **۴)** ۱۴۴π

۲۹) مرکز دایرهٔ C نقطه‌ای دلخواه روی سهمی $۲y = ۳x^۲ - ۶x + ۳$ است. اگر دایرهٔ C از کانون سهمی عبور کند، کدام‌یک از خطوط زیر بر دایره مماس است؟

۱) $۶y + ۱ = ۰$ **۲)** $۶x + ۱ = ۰$ **۳)** $۳y + ۱ = ۰$ **۴)** $۳x + ۱ = ۰$

۳۰) معادله خط هادی سهمی $۳y^۲ - ۴x + ۶y + ۵ = ۰$ کدام است؟

۱) $x = -\frac{۱}{۲}$ **۲)** $x = \frac{۱}{۶}$ **۳)** $x = \frac{۵}{۶}$ **۴)** $x = \frac{۳}{۲}$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۲ زماندار**

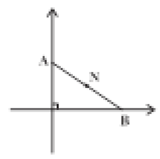
تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

وقتی A و B روی محورهای مختصات حرکت می‌کنند (به جز حالت‌هایی که A یا B روی مبدأ مختصات واقع شوند)، همواره یک مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر ۸ بوجود می‌آید.



می‌دانیم طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است، پس نقطه N وسط پاره‌خط AB به فاصله ۴ واحد از مبدأ مختصات قرار دارد، یعنی مکان هندسی نقطه N، دایره‌ای به مرکز (۰,۰) و شعاع ۴ است.

بیشترین فاصله نقطه M از نقاط روی این دایره برابر است با:

$$|OM| + R = \sqrt{۹ + ۱۶} + ۴ = ۹$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P و سطح مخروطی همان مولد مخروط و در نتیجه یک خط است.

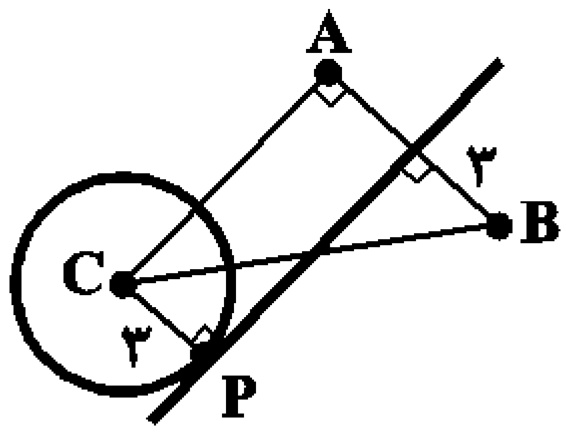
سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند، بر عمودمنصف پاره‌خط AB واقع‌اند و مجموعهٔ نقاطی که از نقطه C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است.

با توجه به این‌که خط و دایره تنها یک نقطهٔ مشترک دارند، پس عمودمنصف پاره‌خط AB بر دایره در نقطهٔ P مماس است. اگر نقاط A و C در یک طرف این عمودمنصف قرار داشته باشند، پاره‌خط AC موازی عمودمنصف پاره‌خط AB است (A و C فاصله‌ای یکسان از عمودمنصف دارند) و در نتیجه CA بر AB عمود است،یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌باشد.



سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

اگر صفحه P به‌گونه‌ای باشد که هر دو نیمه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد در این صورت فصل مشترک حاصل هذلولی است ولی دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده است که صفحه شامل محور سطح مخروطی است که در این صورت فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع می‌باشد.

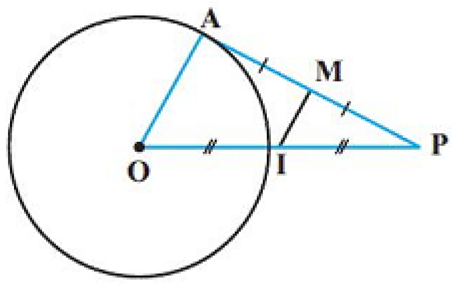
سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

تنها در صورتی نقطه‌ای در صفحه به فاصله یکسان از تمامی اضلاع یک چند ضلعی وجود دارد که نیمسازهای زوایای داخلی آن چندضلعی در یک نقطه همرس باشند. در این‌صورت چندضلعی را محیطی می‌نامند. چهارضلعی ABCD درصورتی محیطی است که $AB + CD = AD + BC$باشد، یعنی مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد. با توجه به این تعریف کایت همواره محیطی است و مستطیل و متوازی‌الاضلاع محیطی نیستند. همچنین ذوزنقه متساوی‌الساقین تنها در صورتی که مجموع طول دو قاعده آن برابر مجموع طول ساق‌ها باشد، چهارضلعی محیطی است.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴



اگر از نقطه P به نقطه متغیر A روی دایره و نیز به مرکز دایره که نقطه‌ای ثابت است، وصل کنیم و وسط پاره‌خط‌های PA و PO را به‌ترتیب M و I بنامیم، آنگاه بنا به عکس قضیه تالس داریم:

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PI}{IO} = ۱ \Rightarrow MI \parallel AO$$

در این‌صورت طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{MI}{AO} = \frac{PM}{PA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MI = \frac{OA}{۲} = \frac{R}{۲}$$

از طرفی چون پاره‌خط PO ثابت است، پس وسط آن یعنی نقطه I نیز نقطه‌ای ثابت است و در نتیجه مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز I و به شعاع $\frac{R}{۲}$ است.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنید نقطهٔ $M(x,y)$ روی این مکان هندسی واقع باشد. در این صورت داریم:

$$MA = \frac{\sqrt{۲}}{۲}MB \Rightarrow \sqrt{(-۲-x)^۲ + (۴-y)^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{(۱-x)^۲ + (۳-y)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (-۲-x)^۲ + (۴-y)^۲ = \frac{۱}{۲}\left[(۱-x)^۲ + (۳-y)^۲\right]$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲(۴ + ۴x + x^۲) + ۲(۱۶ - ۸y + y^۲) = (۱ - ۲x + x^۲) + (۹ - ۶y + y^۲)$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۱۰x - ۱۰y + ۳۰ = ۰$$

معادلهٔ حاصل متعلق به یک دایره است که مرکز و شعاع آن از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

مرکز : $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (-۵, ۵)$

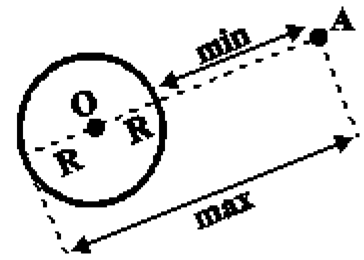
شعاع : $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰^۲ + (-۱۰)^۲ - ۴(۳۰)} = ۲\sqrt{۵}$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر A نقطه‌ای در خارج دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، آن‌گاه بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط این دایره به ترتیب برابر $OA + R$ و $OA - R$ است.

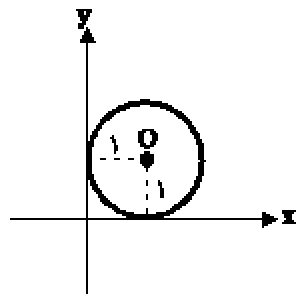


از طرفی داریم:

$$OA = \sqrt{(۵ - ۱)^{۲} + (۴ - ۱)^{۲}} = ۵$$

$$\frac{OA+R}{OA-R} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵+R}{۵-R} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow R = ۱$$

فاصلهٔ مرکز دایره از هر دو محور برابر شعاع دایره است، پس بر هر دو محور مماس است.



سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد، پس $O(\alpha,-\alpha)$ مختصات مرکز دایره است. همچنین فاصلهٔ O تا نقطهٔ A و خط مماس باید برابر باشد:

$$OA = OH \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۰)^{۲} + (-\alpha - ۲)^{۲}} = \frac{|۴\alpha+۶|}{\sqrt{۹+۱}}$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲} + (\alpha^{۲} + ۴\alpha + ۴) = \frac{۱۶\alpha^{۲}+۴۸\alpha+۳۶}{۱۰}$$

$$\Rightarrow ۲۰\alpha^{۲} + ۴۰\alpha + ۴۰ = ۱۶\alpha^{۲} + ۴۸\alpha + ۳۶$$

$$\Rightarrow ۴\alpha^{۲} - ۸\alpha + ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha^{۲} - ۲\alpha + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (\alpha - ۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{۱^{۲} + (-۱ - ۲)^{۲}} = \sqrt{۱۰}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

در معادلهٔ ضمنی دایره، ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یکدیگرند، پس $m = ۱$ است. شعاع دایره در معادلهٔ ضمنی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} \Rightarrow ۳ = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۴^۲ - ۴k}$$

$$\Rightarrow ۶ = \sqrt{۲۰ - ۴k} \Rightarrow ۲۰ - ۴k = ۳۶ \Rightarrow ۴k = -۱۶ \Rightarrow k = -۴$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این‌که معادله یک قطر دایره به صورت $y = x - ۲$ است، پس مختصات مرکز دایره را می‌توان $O(x, x - ۲)$ در نظر گرفت. با فرض $A(۰, ۱)$ و $B(۳, ۰)$، داریم:

$$OA = OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۰ - x)^۲ + (۱ - x + ۲)^۲} = \sqrt{(۳ - x)^۲ + (۰ - x + ۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}} (-x)^۲ + (۳ - x)^۲ = (۳ - x)^۲ + (۲ - x)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = (۲ - x)^۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ - ۴x + x^۲ \Rightarrow ۴x = ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$R = |OA| = \sqrt{(-۱)^۲ + (۳ - ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ درصورتی متعلق به یک دایره است که رابطهٔ $a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰$ برقرار باشد. برای هر یک از گزینه‌ها درستی این رابطه را امتحان می‌کنیم. (در مواردی که ضریب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ عددی غیر یک باشد، ابتدا معادله را به آن عدد تقسیم می‌کنیم.)

گزینهٔ «۱»:

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x+۳y+۴=۰ \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=۴+۹-۱۶=-۳<۰$$

گزینهٔ «۲»:

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x+۲y+۲=۰ \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=۴+۴-۸=۰$$

گزینهٔ «۳»:

$$x^{۲}+y^{۲}+\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}y+\frac{۱}{۳}=۰ \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}-\frac{۴}{۳}=-\frac{۴}{۹}<۰$$

گزینهٔ «۴»:

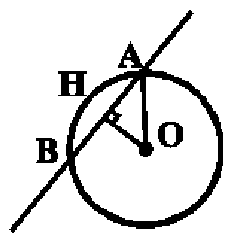
$$x^{۲}+y^{۲}+\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}y+۱=۰ \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c=\frac{۹}{۴}+\frac{۹}{۴}-۴=\frac{۱}{۲}>۰$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

فرض کنید خط و دایره در نقاط A و B یکدیگر را قطع کنند. در این‌صورت $AB=۴$ و $AH=۲$ است.



$O(-۱,-۲)$: مرکز دایره

شعاع دایره : $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^{۲}+۴^{۲}-۴m}=\sqrt{۵-m}$

$$OH=\frac{|-۱+۲(-۲)+۱۰|}{\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲} \Rightarrow ۵-m=۵+۴$$

$$\Rightarrow m=۵-۹=-۴$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ درصورتی یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند که رابطهٔ $a^۲ + b^۲ - ۴c = ۰$ برقرار باشد، بنابراین داریم:

$$m^۲ + (m+۱)^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m^۲ + m^۲ + ۲m + ۱ - ۴m = ۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۲m + ۱ = ۰$$

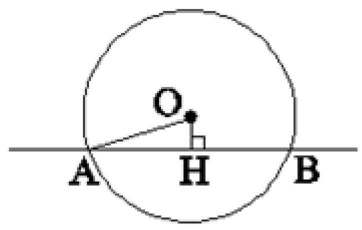
$$\Delta = (-۲)^۲ - ۴ \times ۲ \times ۱ = -۴ < ۰$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به ازای هیچ مقدار m جواب ندارد و معادلهٔ صورت سؤال نیز به ازای هیچ مقدار m، یک نقطه را در صفحه مشخص نمی‌کند.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم. داریم:



$O(۱, ۱)$: مرکز دایره

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (-۲)^۲ - ۴(-۲)} = ۲$: شعاع دایره

$$OH = \frac{|۳(۱) - ۴(۱) + ۷|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{۶}{۵}$$

$$\overset{\triangle}{OAH} : AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۴ - \frac{۳۶}{۲۵} = \frac{۶۴}{۲۵} \Rightarrow AH = \frac{۸}{۵}$$

قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$AB = ۲AH = ۲ \times \frac{۸}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به اینکه یکی از قطرهای دایره بر روی خط $y = x + ۳$ قرار دارد، پس می‌توان مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha + ۳)$ نوشت. در این صورت داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(-۲-\alpha)^۲ + (۱-\alpha-۳)^۲} = \sqrt{(-۲-\alpha)^۲ + (-۲-\alpha-۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (۱-\alpha)^۲ + (-۲-\alpha)^۲ = (-۲-\alpha)^۲ + (-۵-\alpha)^۲$$

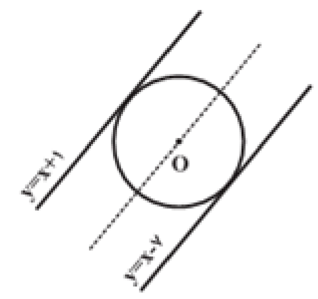
$$\Rightarrow (۱-\alpha)^۲ = (-۵-\alpha)^۲ \Rightarrow ۱ - ۲\alpha + \alpha^۲ = ۲۵ + ۱۰\alpha + \alpha^۲$$

$$\Rightarrow ۱۲\alpha = -۲۴ \Rightarrow \alpha = -۲$$

$$\text{شعاع دایره} : R = OA = \sqrt{(۱-\alpha)^۲ + (-۲-\alpha)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۲+۲)^۲} = ۳$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۱



معادله خطی که موازی دو خط داده شده و به یک فاصله از آنها قرار دارد عبارت است از $y = x - ۳$. پس مرکز دایره روی این خط قرار دارد.

$$\text{مرکز دایره} : O\left(۲, \frac{-m}{۲}\right) \Rightarrow -\frac{m}{۲} = ۲ - ۳ \Rightarrow m = ۲$$

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|۱-(-۷)|}{\sqrt{۱+۱}} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره} : R = ۲\sqrt{۲}$$

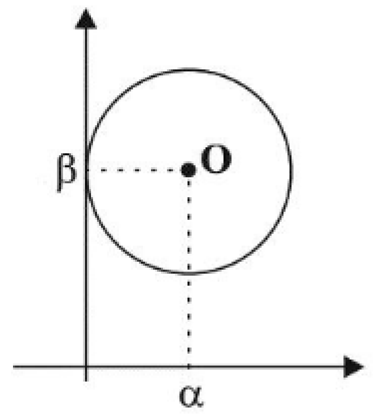
$$R = \frac{\sqrt{۱۶+۴-۴n}}{۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۱۶ + ۴ - ۴n = ۳۲ \Rightarrow n = -۳$$

بنابراین حاصل $m + n$ برابر $۲ - ۳ = -۱$ است.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

اگر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ بر محور yها مماس باشد، آن‌گاه $R = |\alpha|$ است. بنابراین داریم:



$$\frac{1}{۲}\sqrt{۴(m-۱)^۲ + ۴m^۲ - ۴(۴m-۳)} = |m-۱|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{۴}\left(۴(m-۱)^۲ + ۴m^۲ - ۴(۴m-۳)\right) = (m-۱)^۲$$

$$\Rightarrow (m-۱)^۲ + m^۲ - ۴m + ۳ = (m-۱)^۲$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴m + ۳ = ۰ \Rightarrow (m-۳)(m-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = ۳ \end{cases}$$

$$m = ۱ \Rightarrow R = |m-۱| = ۰$$

به‌ازای $m = ۱$، دایره تشکیل نمی‌شود پس این مقدار قابل قبول نیست.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره‌ها و سپس طول خط‌المرکزین دو دایره را به دست آورده و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر تعیین می‌کنیم.

$$C_۱ : x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$$

$$O_۱(-۲, ۰), R_۱ = \frac{1}{۲}\sqrt{۴^۲} = ۲$$

$$C_۲ : x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + ۸ = ۰$$

$$O_۲(۱, -۴), R_۲ = \frac{1}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۸^۲ - ۴(۸)} = ۳$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۴-۰)^۲} = ۵$$

دو دایره مماس خارج‌اند. $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را تعیین می‌کنیم.

$C_۱ : x^۲ + y^۲ = ۴$

$R_۱ = ۲$: شعاع و $O_۱(۰,۰)$: مرکز

$C_۲ : x^۲ + y^۲ - ۶x + ۸y - m = ۰$

$O_۲(۳,-۴)$: مرکز

$R_۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲ + ۸^۲ - ۴(-m)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰ + ۴m} = \sqrt{۲۵ + m}$: شعاع

$O_۱O_۲ = \sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲} = ۵$

دو دایرهٔ مماس خارج هستند، پس داریم:

$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۲ + \sqrt{۲۵ + m} \Rightarrow \sqrt{۲۵ + m} = ۳$

$\Rightarrow ۲۵ + m = ۹ \Rightarrow m = -۱۶$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

در مثلث MFF' ،MO میانه است، پس داریم:

$MO = OF' = \frac{FF'}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ$

$AF = a - c = ۱ \Rightarrow a = c + ۱$

$\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{c}{c+۱} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow c = ۴, a = ۵$

$MF + MF' = ۲a = ۱۰$

$\hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = (۲c)^۲ = ۴c^۲ = ۶۴$

$MF + MF' = ۱۰ \xrightarrow{\text{توان۲}} MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF.MF' = ۱۰۰$

$۱۶ + ۲MF.MF' = ۱۰۰ \Rightarrow MF.MF' = ۱۸$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

سهمی‌هایی که معادلات آنها در گزینه‌های «۳» و «۴» داده شده است، رو به بالا یا پایین باز می‌شوند، بنابراین کافی است معادلات گزینه‌های «۱» و «۲» را بررسی کنیم.

گزینه «۱»:

$$y^۲ - ۲x + ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ + ۲y + ۱ = ۲x + ۲$$

$$\Rightarrow (y + ۱)^۲ = ۲(x + ۱)$$

دهانه سهمی رو به راست است.

گزینه «۲»:

$$y^۲ + ۴x - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = -۴x + ۴$$

$$\Rightarrow (y - ۱)^۲ = -۴(x - ۱)$$

دهانه سهمی رو به چپ است.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

قطرهای بزرگ و کوچک لوزی بر هم عمودند، بنابراین مطابق شکل داریم:

$$\frac{S_{BFF'}}{S_{A'BB'}} = \frac{\frac{۱}{۲}OB \times FF'}{\frac{۱}{۲}OA' \times BB'} = \frac{\frac{۱}{۲} \times b \times ۲c}{\frac{۱}{۲} \times a \times ۲b} = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۸}$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$x^۲ - ۲x + ۱۶y + m = ۰$

$\Rightarrow (x - ۱)^۲ - ۱ + ۱۶y + m = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = -۱۶y - m + ۱$

$(x - ۱)^۲ = -۱۶(y + \frac{m-۱}{۱۶})$

بنابراین دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود و $A(۱, \frac{۱-m}{۱۶})$ رأس و $a = ۴$ فاصلهٔ کانونی سهمی است.

کانون سهمی : $F(h, -a + k) = (۱, -۴ + \frac{۱-m}{۱۶})$

$\Rightarrow -۴ + \frac{۱-m}{۱۶} = -۲ \Rightarrow \frac{۱-m}{۱۶} = ۲$

$\Rightarrow ۱ - m = ۳۲ \Rightarrow m = -۳۱$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۱

$y^۲ + ۸y - ۴x = m \Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶ = ۴x + m + ۱۶$

$\Rightarrow (y + ۴)^۲ = ۴(x + \frac{m}{۴} + ۴)$

سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است. از طرفی $A(-\frac{m}{۴} - ۴, -۴)$ رأس سهمی و $a = ۱$ فاصله کانونی سهمی است، بنابراین داریم:

کانون سهمی : $F(a + h, k) = (-\frac{m}{۴} - ۳, -۴) \xrightarrow{y=x} -۴ = -\frac{m}{۴} - ۳$

$\Rightarrow \frac{m}{۴} = ۱ \Rightarrow m = ۴$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در چراغ جلوی اتومبیل، اگر لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی و کمی بالاتر یا پایین‌تر از کانون قرار گیرد، شعاع‌های نور موازی با هم (نه موازی با محور سهمی) رو به بالا یا رو به پایین خارج می‌شوند. بنابراین کافی است مختصات کانون سهمی را به دست آوریم:

$y^۲ - ۴y - ۴x + ۸ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۴y = ۴x - ۸$

$\xrightarrow{+۴} y^۲ - ۴y + ۴ = ۴x - ۴ \Rightarrow (y - ۲)^۲ = ۴(x - ۱)$

دهانهٔ سهمی رو به راست و $A(۱, ۲)$ رأس و $a = ۱$ فاصلهٔ کانونی آن است و داریم:

کانون : $F(a + h, k) = F(۲, ۲)$

پس لامپ باید روی خط $x = ۲$ قرار داشته باشد تا شعاع‌های نور موازی با هم خارج شوند که در بین گزینه‌ها تنها نقطهٔ $(۲, ۳)$ روی این خط قرار دارد.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا معادلهٔ سهمی را به حالت متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$y^۲ = ۲x - ۴y \Rightarrow y^۲ + ۴y + ۴ = ۲x + ۴ \Rightarrow (y + ۲)^۲ = ۲(x + ۲)$$

دهانهٔ سهمی رو به راست باز می‌شود و نقطهٔ $A(-۲, -۲)$ رأس سهمی است. فاصلهٔ کانونی سهمی برابر است با: $۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

$$\text{کانون سهمی}: F(a + h, k) = (-۲ + \frac{۱}{۲}, -۲) = (-\frac{۳}{۲}, -۲)$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر برابر است با:

$$(x + \frac{۳}{۲})^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴$$

از تلاقی دایره و سهمی داریم:

$$(x + \frac{۳}{۲})^۲ + ۲(x + ۲) = ۴ \Rightarrow x^۲ + ۳x + \frac{۹}{۴} + ۲x + ۴ = ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۵x + \frac{۹}{۴} = ۰ \Rightarrow (x + \frac{۹}{۲})(x + \frac{۱}{۲}) = ۰$$

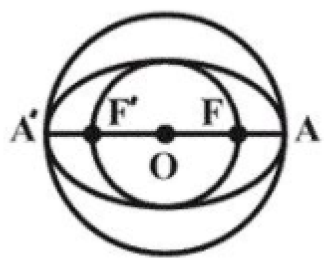
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۹}{۲} \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با توجه به اینکه طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{۳}{۲}$ است و دهانهٔ سهمی رو به راست باز می‌شود، پس نقطه‌ای به طول $x = -\frac{۹}{۲}$ نمی‌تواند نقطهٔ تلاقی سهمی و دایره باشد.

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه«۲»



دو دایره به قطرهای AA' و FF' هم مرکز هستند و شعاع آنها به ترتیب برابر $OA = a$ و $OF = c$ است. داریم:

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = \pi a^۲ - \pi c^۲ = \pi(a^۲ - c^۲)$$

$$= \pi b^۲ = \pi(\frac{۱۲}{۲})^۲ = ۳۶\pi$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

اگر نقطهٔ M روی یک سهمی به کانون F و خط هادی d قرار داشته باشد، آنگاه این نقطه از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله است، پس دایره به مرکز M و شعاع MF، از کانون سهمی گذشته و بر خط هادی سهمی مماس است.

$$2y = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 2y = 3(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{2}{3}y$$

دهانهٔ این سهمی رو به بالا و رأس آن نقطهٔ $A(1,0)$ است. فاصلهٔ کانونی این سهمی برابر است با: $4a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

معادلهٔ خط هادی : $y = k - a = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow 6y = -1 \Rightarrow 6y + 1 = 0$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ۲

معادله سهمی را به فرم متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$3y^2 - 4x + 6y + 5 = 0 \Rightarrow 3y^2 + 6y + 3 = 4x - 2$$

$$\Rightarrow 3(y+1)^2 = 4(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})$$

نقطه $A(\frac{1}{2}, -1)$ رأس سهمی است و سهمی رو به راست باز می‌شود، بنابراین داریم:

$$4a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

معادله خط هادی : $x = -a + h = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

مدت زمان آزمون: --

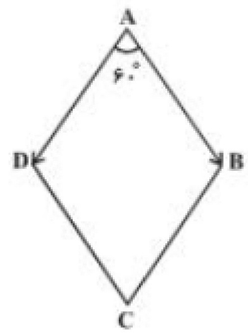
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۳ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

۱) مطابق شکل، لوزی ABCD با طول ضلع ۲ واحد و زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰°$ مفروض است. طول بردار $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ چند واحد است؟

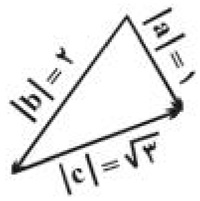


۱) ۲
۲) ۴
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

۲) تصاویر بردار $\vec{a}$ روی محورهای Ox، Oy و Oz به‌ترتیب بردارهای (۲,۰,۰)، (۰,-۱,۰) و (۰,۰,-۲) هستند. طول بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۳) با توجه به شکل زیر، اندازهٔ بردار $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$، کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۴) دو بردار متمایز و غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ طوری مفروض‌اند که بردار $\vec{a}$ قرینهٔ بردار $\vec{b}$ نسبت به امتداد $\vec{a}+\vec{b}$ است. کدام یک از عبارات زیر لزوماً درست است؟

۱) طول دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ با هم برابر است.
۲) بردار $\vec{a}-\vec{b}$ نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.
۳) بردار $\vec{a}$ قرینهٔ بردار $\vec{b}$ نسبت به امتداد $\vec{a}-\vec{b}$ است.
۴) دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمودند.

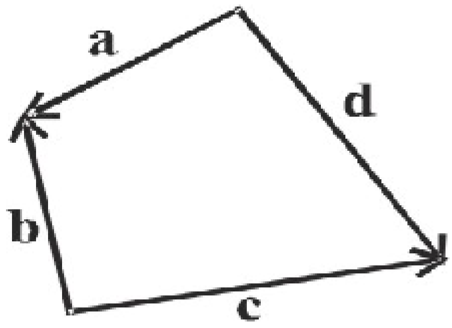
۵) تصویر نقطهٔ $A = (a,b,۳)$ روی صفحهٔ xy، نقطهٔ $B = (۲,۳,c)$ و قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به همین صفحه، نقطهٔ $C = (d,e,f)$ است. مجموع مختصات نقطهٔ C کدام است؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) -۴
۴) -۲

۶) مساحت مثلث ABC با سه رأس $A = (۲,۳,۱)$، $B = (-۱,۰,۴)$ و $C = (۱,۲,۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۷) بردارهای $\vec a$، $\vec b$، $\vec c$ و $\vec d$ به‌ترتیب با طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. حاصل $\vec a \cdot \vec c - \vec b \cdot \vec d$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۲-
۳) ۴-
۴) ۵

۸) اگر طول تصویر قائم بردار $\vec a = (۱, m-۱, ۱)$ روی بردار $\vec b = (m-۱, ۱, ۰)$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲-
۳) ۳
۴) ۳-

۹) اگر $|\vec a| = ۲$، $|\vec b| = \sqrt{۵}$ و $|۲\vec a + ۳\vec b| = \sqrt{۸۵}$ باشد، طول تصویر قائم بردار $\vec a$ بر راستای بردار $\vec b$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰) اگر اندازه‌های سه بردار $\vec a$، $\vec b$ و $۳\vec a + ۲\vec b$ به ترتیب برابر ۱ ، ۲ و ۵ واحد باشد، اندازه بردار $۳\vec a - ۲\vec b$ برابر کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۱) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $(۱,۲,-۱)$، $(۳,۱,۰)$ و $(m,-۲,۱)$ برابر ۵ واحد مکعب است. مقادیر m کدام است؟

۱) ۸ و ۱۸
۲) ۸- و ۱۸-
۳) ۶ و ۴-
۴) ۴ و ۶-

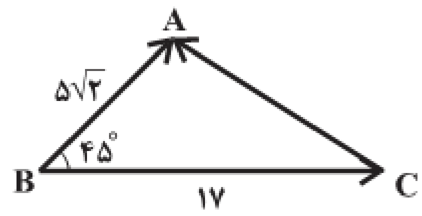
۱۲) اگر مبدأ مختصات ابتدای سه بردار غیرصفر و متمایز $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ و نقاط A، B و C (با همین ترتیب) انتهای سه بردار مذکور در فضای $R^۳$ باشند به طوری که $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$، آنگاه $\vec a \times \vec b$ کدام است؟

۱) $\vec a \times \vec c - \vec b \times \vec c$
۲) $\vec a \times \vec c + \vec b \times \vec c$
۳) $\vec c \times \vec a - \vec b \times \vec c$
۴) $\vec c \times \vec a + \vec b \times \vec c$

۱۳) اگر نقاط $A = (۲,۱,-۱)$ و $C = (۲,-۲,۳)$ دو رأس از مربع ABCD باشند، حاصل $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ کدام است؟

۱) ۲۵
۲) $\frac{۲۵}{۲}$
۳) $۲۵\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴) در شکل مقابل، حاصل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟



۱) ۱۶۰- ۲) ۱۹۰- ۳) ۲۰۰- ۴) ۲۰۴-

۱۵) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{a}\times\vec{b}| = ۵\sqrt{۵}$ و $\vec{a}.\vec{b} = -۱$ باشد، آنگاه $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۱۱}$

۱۶) اگر $|\vec{a}| = ۲\sqrt{۲}$، $|\vec{b}| = ۲\sqrt{۳}$ و $|\vec{a}+\vec{b}| = ۶$ باشد، مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۷) تصویر قائم بردار $\vec{a} = (-۱,۱,۰)$ بر امتداد بردار $\vec{b} = (۲,-۱,-۲)$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳})$
۳) $(۲,-۱,-۲)$ ۴) $(-۲,۱,۲)$

۱۸) مثلث ABC، مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ است. حاصل عبارت $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB})$ کدام است؟

۱) $۲\overrightarrow{CB}$ ۲) $۲\overrightarrow{BC}$ ۳) $۴\overrightarrow{CB}$ ۴) $۴\overrightarrow{BC}$

۱۹) اگر $\vec{a} = (۱,-۱,۲)$ و $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ باشد، کسینوس زاویهٔ حادة بین قطرهای متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۰) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و $|\vec{a}+\vec{b}| = ۸$ باشد، بیش‌ترین مقدار ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۱) اگر $\vec{a} = \vec{j}+\vec{k}$ باشد، آنگاه حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{a}\times\vec{j}$ و $\vec{j}$ کدام است؟ ($\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکهٔ محورهای مختصات هستند.)

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۴

۲۲) اگر $\vec{a}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۲,۱,۰)$ باشد، آنگاه اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۳) اگر سه نقطه $A=(۰,۱,۱)$، $B=(-۱,۰,۲)$ و $C=(۲,۱,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، بردار $\overrightarrow{BH}$ (ارتفاع وارد بر ضلع AC) کدام است؟

۱) $(-۱,۱,۰)$
۲) $(۰,-۱,۱)$
۳) $(-۱,۳,۰)$
۴) $(۰,-۳,۱)$

۲۴) چند نقطه مانند M روی محیط مربع ABCD وجود دارد که $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AC}|^۲$ باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ
۴) بی شمار

۲۵) تصویر بردار $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ بر امتداد بردار $\vec{b}=(۰,۱,-۱)$ کدام است؟

۱) $(۰,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$
۲) $(۰,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$
۳) $(\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲})$
۴) $(\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲})$

۲۶) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و r عددی حقیقی باشد، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر <u>نادرست</u> است؟

۱) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
۲) $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=۰$
۳) $r\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times r\vec{b}$
۴) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

۲۷) اگر $A=(۱,-۱,۲)$، $B=(۲,۲,۴)$ و $C=(-۲,۰,۱)$ سه رأس از متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، آنگاه طول قطر BD کدام است؟

۱) ۵
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۳}$
۴) ۱۰

۲۸) اگر $A=[۱,۴]$ و $B=(-۱,۳]$ باشند، مساحت نمودار $A\times A-B\times B$ در صفحه مختصات کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۶

۲۹) بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی به‌طول واحد هستند و $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^۲+\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^۲+\left|\vec{c}-\vec{a}\right|^۲=۹$ می‌باشد. اندازه بردار $۲\vec{a}+۵\vec{b}+۵\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴

۳۰) اگر مساحت مثلثی که روی بردارهای $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۲۶$ ساخته می‌شود، برابر ۳۶ واحد مربع باشد، حاصل‌ضرب داخلی این دو بردار کدام است؟ (زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کوچکتر از ۹۰° است.)

۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۳۶

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

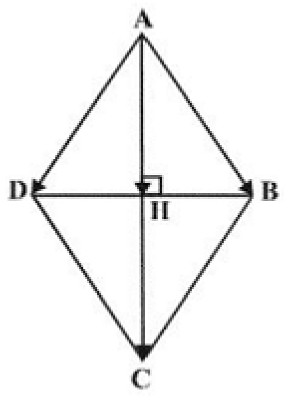
نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۳ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳



مطابق شکل، قطر بزرگ لوزی حاصل برآیند دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ می‌باشد.

اگر H محل برخورد قطرهای کوچک و بزرگ لوزی باشد، آنگاه داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=۲\overrightarrow{AH}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=۲|\overrightarrow{AH}|$$

مثلث ABD مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ واحد است که طول ارتفاع آن برابر $\sqrt{۳}=(۲)\frac{\sqrt{۳}}{۲}=|\overrightarrow{AH}|$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=۲|\overrightarrow{AH}|=۲\sqrt{۳}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

تصویر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ بر روی محورهای Ox، Oy و Oz به‌ترتیب به‌صورت $(a_۱,۰,۰)$، $(۰,a_۲,۰)$ و $(۰,۰,a_۳)$ است، بنابراین بردار $\vec{a}$ به‌صورت $\vec{a}=(۲,-۱,-۲)$ است و داریم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

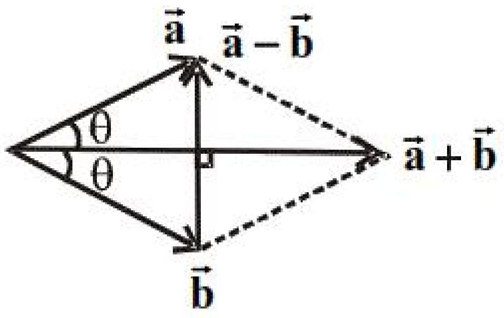
با توجه به شکل، $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ است و در نتیجه داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{c}+\vec{c}|=۲|\vec{c}|=۲\sqrt{۳}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»



مطابق شکل، چنانچه بردار $\vec{a}$ قرینهٔ بردار $\vec{b}$ نسبت به امتداد $\vec{a}+\vec{b}$ باشد، آنگاه اولاً طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر یکدیگرند، ثانیاً بردار $\vec{a}+\vec{b}$ نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

در نتیجه متوازی‌الاضلاع بنا شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، لوزی بوده و می‌دانیم در لوزی، قطرها بر هم عمودند، یعنی $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$.

گزینهٔ «۱»: طول دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ و $(\vec{a}-\vec{b})$ لزوماً با هم برابر نیست.

گزینهٔ «۲»: بردار $\vec{a}+\vec{b}$ (نه بردار $\vec{a}-\vec{b}$) نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

گزینهٔ «۳»: بردار $\vec{a}$ قرینهٔ بردار $\vec{b}$ نسبت به امتداد $\vec{a}+\vec{b}$ (نه $\vec{a}-\vec{b}$) است.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$A=(a,b,۳)\xrightarrow{\text{تصویر روی } xy}A'=(a,b,۰)$$

$$A'=B\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۳$$

$$A=(۲,۳,۳)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } xy}C=(۲,۳,-۳)$$

بنابراین مجموع مختصات نقطهٔ C، برابر ۲ است

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(-۳,-۳,۳)\\ \overrightarrow{AC}=(-۱,-۱,۰)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(۳,-۳,۰)$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲+(-۳)^۲}=\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}+(-\vec{d})=\vec{o}\Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{c}|^{۲}=|\vec{b}+\vec{d}|^{۲}\Rightarrow |\vec{a}|^{۲}+|\vec{c}|^{۲}+۲\vec{a}.\vec{c}=|\vec{b}|^{۲}+|\vec{d}|^{۲}+۲\vec{b}.\vec{d}$$

$$\Rightarrow ۲(a.c-b.d)=|\vec{b}|^{۲}+|\vec{d}|^{۲}-(|\vec{a}|^{۲}+|\vec{c}|^{۲})$$

$$\Rightarrow ۲(\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d})=۲^{۲}+۴^{۲}-(۱^{۲}+۳^{۲})=۱۰\Rightarrow \vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d}=۵$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{|(m-۱)+(m-۱)+۰|}{\sqrt{(m-۱)^{۲}+۱}}=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲|m-۱|}{\sqrt{(m-۱)^{۲}+۱}}=\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴(m-۱)^{۲}=۳(m-۱)^{۲}+۳$$

$$\Rightarrow (m-۱)^{۲}=۳\Rightarrow m^{۲}-۲m+۱=۳\Rightarrow m^{۲}-۲m-۲=۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } m=-\frac{-۲}{۱}=۲$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

$$|۲\vec{a}+۳\vec{b}|=\sqrt{۸۵}\Rightarrow |۲\vec{a}+۳\vec{b}|^{۲}=۸۵$$

$$\Rightarrow ۴|\vec{a}|^{۲}+۱۲\vec{a}.\vec{b}+۹|\vec{b}|^{۲}=۸۵$$

$$\Rightarrow ۱۶+۱۲\vec{a}.\vec{b}+۴۵=۸۵\Rightarrow ۱۲\vec{a}.\vec{b}=۲۴\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۲$$

اگر بردار $\vec{a'}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$|\vec{a'}|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

$$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|^2 = 9\left|\vec{a}\right|^2 + 4\left|\vec{b}\right|^2 + 12\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow 25 = 9 + 16 + 12\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

$$\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|^2 = 9\left|\vec{a}\right|^2 + 4\left|\vec{b}\right|^2 - 12\vec{a}.\vec{b} = 9 + 16 - 0 = 25$$

$$\Rightarrow \left|3\vec{a}-2\vec{b}\right| = 5$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر $V = \left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$ است. با فرض $\vec{a} = (m,-2,1)$، $\vec{b} = (1,2,-1)$ و $\vec{c} = (3,1,0)$ داریم:

$$\begin{cases} \vec{b} = (1,2,-1) \\ \vec{c} = (3,1,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = (1,-3,-5)$$

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = m + 6 - 5 = m + 1$$

$$V = \left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| \Rightarrow |m+1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 5 \Rightarrow m = 4 \\ m+1 = -5 \Rightarrow m = -6 \end{cases}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\vec{b}-\vec{a}) \| (\vec{c}-\vec{a}) \Rightarrow (\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a}) = 0$$

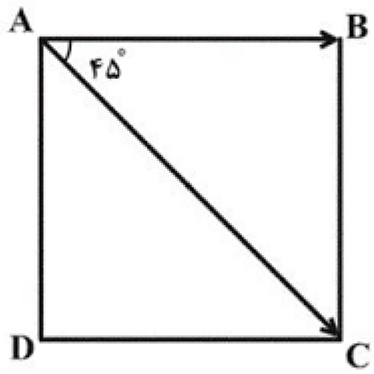
$$\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{c} + \underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$$-\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{c}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(۲-۲)^{۲}+(-۲-۱)^{۲}+(۳+۱)^{۲}} = ۵$$

طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است. از طرفی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ با یکدیگر زاویهٔ $۴۵°$ می‌سازند، بنابراین داریم:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{۲}\left|\overrightarrow{AB}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos ۴۵° = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times ۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵}{۲}$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}\,.\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA} - \left|\overrightarrow{BC}\right|^{۲}$$

$$= \left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos ۴۵° - \left|\overrightarrow{BC}\right|^{۲} = ۱۷ \times ۵\sqrt{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱۷^{۲} = -۲۰۴$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^{۲} + \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^{۲} = \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow \left(۵\sqrt{۵}\right)^{۲} + (-۱)^{۲} = ۳^{۲} \times \left|\vec{b}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow ۹\left|\vec{b}\right|^{۲} = ۱۲۶ \Rightarrow \left|\vec{b}\right|^{۲} = ۱۴ \xrightarrow{\left|\vec{b}\right|>۰} \left|\vec{b}\right| = \sqrt{۱۴}$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{۲} = |\vec{a}|^{۲} + |\vec{b}|^{۲} + ۲\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow ۳۶ = ۸ + ۱۲ + ۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow ۲\vec{a}.\vec{b} = ۱۶ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۸$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲} + \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^{۲} = |\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲} \Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲} + ۶۴ = ۸ \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲} = ۳۲ \Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ۴\sqrt{۲}$$

مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$\vec{a}.\vec{b} = (-۱,۱,۰).(۲,-۱,-۲) = -۲-۱+۰ = -۳$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{۲^{۲} + (-۱)^{۲} + (-۲)^{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$$

اگر بردار $\vec{a'}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{-۳}{۹}(۲,-۱,-۲) = \left(-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$$

سوال ۱۸

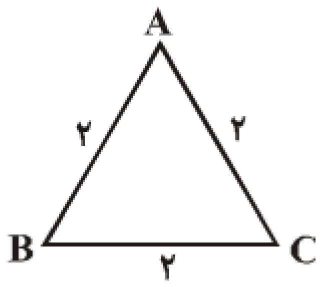
پاسخ: گزینه ۲

با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع ABCداریم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ = 2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos 120^\circ = 2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB})\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$= 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{BC}$$



تذکر: دقت کنید که زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و نیز $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$، مکمل زاویه‌های B و C در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است، چون ابتدا یا انتهای هر جفت از این بردارها بر نقطه B یا C منطبق نیست.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود. اگر زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع برابر θ باشد، داریم:

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,-1,2) + (1,-1,0) = (2,-2,2)$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (1,-1,2) - (1,-1,0) = (0,0,2)$$

$$\cos\theta = \frac{\left|(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})\right|}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|0+0+4|}{\sqrt{4+4+4}\times\sqrt{0+0+4}} = \frac{4}{2\sqrt{3}\times 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{۲} - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲} = \left(\left|\vec{a}\right|^{۲} + \left|\vec{b}\right|^{۲} + ۲\vec{a}.\vec{b}\right) - \left(\left|\vec{a}\right|^{۲} + \left|\vec{b}\right|^{۲} - ۲\vec{a}.\vec{b}\right)$$

$$= ۴\vec{a}.\vec{b} \xrightarrow{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲} \geq ۰} \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{۲} \geq ۴\vec{a}.\vec{b} \xrightarrow{\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = ۸} ۴\vec{a}.\vec{b} \leq ۶۴$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} \leq ۱۶$$

تذکر: حالت تساوی زمانی برقرار است که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم راستا، هم جهت و هم اندازه $\left(\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = ۴\right)$ باشند.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{j}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}\vec{a} = (۰,۱,۱)\\ \vec{j} = (۰,۱,۰)\end{array} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{j} = (-۱,۰,۰)$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a} = (۰,۱,۱)$، $\vec{j} = (۰,۱,۰)$ و $\vec{a}\times\vec{j} = (-۱,۰,۰)$ برابر است با:

$$V = |(\vec{a}\times\vec{j}).(\vec{a}\times\vec{j})| = |\vec{a}\times\vec{j}|^{۲} = ۱$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$$\vec{a}+\vec{b} = (۱,-۱,۲) + (۲,۱,۰) = (۳,۰,۲)$$

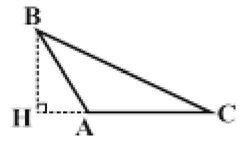
$$\vec{a}-\vec{b} = (۱,-۱,۲) - (۲,۱,۰) = (-۱,-۲,۲)$$

اگر بردار $\vec{u}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ باشد، آنگاه داریم:

$$|\vec{u}| = \frac{|(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})|}{|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|-۳+۰+۴|}{\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{۱}{۳}$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۱



مطابق شکل $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$ است. از طرفی می‌دانیم که بردار $\overrightarrow{AH}$تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$روی بردار $\overrightarrow{AC}$است، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^۲}\overrightarrow{AC}$$

$$= (۱, ۱, -۱) + \frac{(-۱,-۱,۱).(۲,۰,۰)}{۴}(۲, ۰, ۰)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = (۱, ۱, -۱) + (-۱, ۰, ۰) = (۰, ۱, -۱)$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

اگر M یک نقطه روی محیط مربع باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|^۲$$

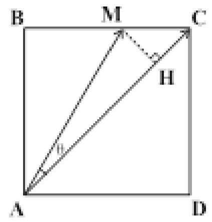
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|^۲$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|\cos\theta = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

و با توجه به اینکه $\left|\overrightarrow{AM}\right|\cos\theta$ در مثلث AMH برابر $\left|\overrightarrow{AH}\right|$ می‌باشد، داریم:

$$\left|\overrightarrow{AH}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

با توجه به اینکه قطرهای مربع یکدیگر را نصف کرده و بر هم عمودند، پس H مرکز مربع بوده و در نتیجه نقطه M باید بر B یا D منطبق باشد.



سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۱

تصویر بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{a'} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\right)\vec{b}$ است. بنابراین داریم:

$$\vec{a'} = \frac{۰+۰-۱}{(\sqrt{۰+۱+۱})^{۲}}\vec{b} \Rightarrow \vec{a'} = -\frac{۱}{۲}\vec{b} = (۰, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

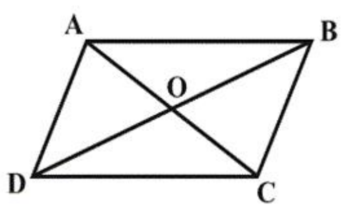
۱) دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

۲) دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



قطرها در متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند. بنابراین داریم:

$$O = \frac{A+C}{۲} = \frac{(۱,-۱,۲)+(-۲,۰,۱)}{۲} = (-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$$

$$OB = \sqrt{(۲+\frac{۱}{۲})^{۲} + (۲+\frac{۱}{۲})^{۲} + (۴-\frac{۳}{۲})^{۲}}$$

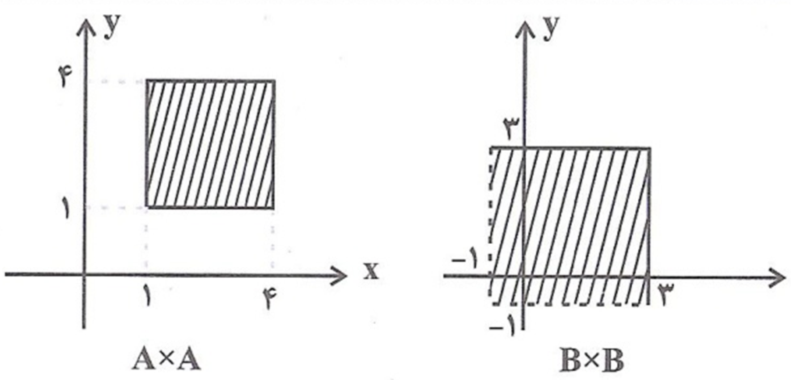
$$= \sqrt{(\frac{۵}{۲})^{۲} + (\frac{۵}{۲})^{۲} + (\frac{۵}{۲})^{۲}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow DB = ۲OB = ۲ \times \frac{۵}{۲}\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$$

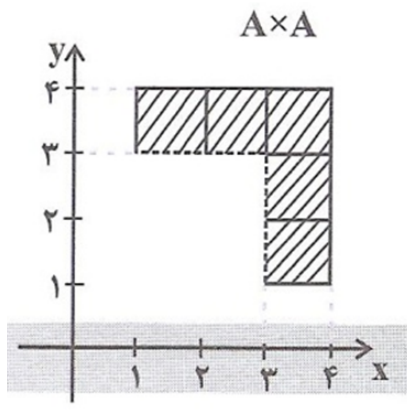
سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



مطابق شکل نمودار $A \times A - B \times B$ از ۵ مربع کوچک هر کدام به طول ضلع ۱ تشکیل شده است و در نتیجه مساحت آن برابر ۵ است.



سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{b}-\vec{c}\right|^{۲}+\left|\vec{c}-\vec{a}\right|^{۲}$$

$$=۲\left(\left|\vec{a}\right|^{۲}+\left|\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{c}\right|^{۲}\right)-۲\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}\right)$$

$$=۳\left(\left|\vec{a}\right|^{۲}+\left|\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{c}\right|^{۲}\right)-\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow ۹=۳\times۳-\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^{۲}\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=۰$$

$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$$

$$\left|۲\vec{a}+۵\vec{b}+۵\vec{c}\right|=\left|۲\vec{a}+۵\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right|=\left|۲\vec{a}+۵\left(-\vec{a}\right)\right|$$

$$=\left|-۳\vec{a}\right|=۳\left|\vec{a}\right|=۳$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}| = ۳۶ \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = ۷۲ \Rightarrow ۳ \times ۲۶ \times \sin\theta = ۷۲$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{۷۲}{۷۸} = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۵}{۱۳}$$

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار برابر است با:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۳ \times ۲۶ \times \frac{۵}{۱۳} = ۳۰$$