مدت زمان آزمون: --

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه ۳ فصل ۱ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

---

۱) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & ۱ \\ ۱ & b & -۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس AB برابر صفر باشند، حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۸-
۳) ۴
۴) ۴-

۲) اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & b-۱ \\ ۲ & ۱-a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & -۲ \\ ۱ & a \\ ۲b & ۳ \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد,آنگاه حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $-\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۱۳}{۶}$
۴) $-\frac{۱۳}{۶}$

۳) با توجه به رابطه $\begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۲ \\ ۱۰ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۴) اگر A یک ماتریس مربعی و $A - A^۲ - I = \bar{O}$ باشد، حاصل $A^۸ + A$ کدام است؟

۱) $A - ۲I$
۲) $۲I - A$
۳) $۲A - I$
۴) $I - ۲A$

۵) اگر $A = [i^۲ + j]_{۲\times۲}$ و $A^۲ = mA + nI$ باشد، زوج مرتب (m, n) کدام است؟

۱) $(۳,۸)$
۲) $(۸,۳)$
۳) $(۲,۶)$
۴) $(۶,۲)$

۶) اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲x - y & -۱ \\ ۴y + z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & x + ۲z \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ مساوی یکدیگر باشند، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{۱}{\cos x} \\ \frac{-۱}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۱۰} + A^۷ + A^۵$ کدام است؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲})$

۱) $۲A + I$
۲) $A - ۲I$
۳) $۲A - I$
۴) $-I$

۸) اگر برای ماتریس‌های A و B، روابط $A - ۲B = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ & -۱ \\ ۱ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $۲A + B = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ & ۱۳ \\ ۲ & ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$ برقرار باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۲

⑨ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$، کدام است؟

۱) $[۰ \quad ۱ \quad ۰]$ **۲)** $[۱ \quad ۰ \quad ۰]$ **۳)** $[۰ \quad ۰ \quad ۱]$ **۴)** $[۱ \quad ۰ \quad ۱]$

⑩ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$، کدام است؟

۱) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۶۴]$ **۲)** $[۳۰ \quad ۶ \quad ۷۸]$ **۳)** $[۲۴ \quad ۸ \quad ۸۶]$ **۴)** $[۳۰ \quad ۶ \quad ۸۶]$

⑪ اگر $A = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{۱۲} & ۱ \\ ۰ & \cos\frac{\pi}{۱۲} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \sin\frac{\pi}{۱۲} \\ \sin\frac{\pi}{۱۲} & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ **۲)** $-\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ **۴)** $-\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

⑫ اگر $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$ و $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$، کدام‌یک از روابط زیر لزوماً برقرار است؟

۱) $c = d = ۰$ **۲)** $a + d = b$ و $c = ۰$ **۳)** $a + d = c$ و $b = ۰$ **۴)** $a + b = c$ و $d = ۰$

⑬ اگر $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x \\ ۴ & -۱ & y \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix} = k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x-۲ \\ ۴ & -۱ & y-۱ \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $k - ۳۰$ **۲)** $k + ۳۰$ **۳)** $k + ۲۱$ **۴)** $k - ۲۱$

⑭ دو ماتریس A و $A - I$ وارون هم هستند. ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) $۲A + I$ **۲)** $A + I$
۳) $A - I$ **۴)** $۲A - I$

⑮ اگر ماتریس $\begin{bmatrix} a+۱ & -b \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} = A^{-۱}$، وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟ $(b \neq ۰)$

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۷ **۴)** ۱۱

⑯ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، از رابطه ماتریسی $AX = A - ۲I$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ **۲)** $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ **۳)** $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ **۴)** $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

⑰ معادله $\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۳ \\ ۱ & x^۲ & x^۲ \\ ۱ & x^۳ & x \end{vmatrix} = ۰$ چند ریشه متمایز دارد؟

۱) ۳ **۲)** صفر **۳)** ۱ **۴)** بی‌شمار

⑱ اگر $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A + B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -۳ \\ \frac{۱}{۴} & -۲ \end{bmatrix}$ **۲)** $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -۲ \\ \frac{۱}{۴} & -۳ \end{bmatrix}$ **۳)** $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & ۲ \\ -\frac{۱}{۴} & ۳ \end{bmatrix}$ **۴)** $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۳ \\ -\frac{۱}{۴} & ۲ \end{bmatrix}$

۱۹) اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & m \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۱ & m \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقدار m، ماتریس $A - B$ وارون‌پذیر نیست؟

۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۲-

۲۰) اگرA و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $|A + B| = ۵$ و $|B| = ۲$ باشد، دترمینان ماتریس $I + AB^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۵

۲۱) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۶ & -۲ \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۲۲
۴) ۲۵

۲۲) A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و $AB = I$ است. اگر $|A^۲| = ۲$ و $|I + B^۲ - B| = ۳$ باشد، دترمینان ماتریس $(I + A - A^۲)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۳) اگر $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲|A| \\ |A| & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، قدرمطلق تفاضل مقادیر ممکن برای دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳/۵
۴) ۴

۲۴) اگر $A^۲ = A + I$ و A ماتریسی ۲ × ۲ باشد، حاصل $|۲A - I|$ کدام است؟

۱) ۳±
۲) $\pm\sqrt{۳}$
۳) ۵±
۴) $\pm\sqrt{۵}$

۲۵) اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} i + j & ; \quad i = j \\ i - j & ; \quad i \neq j \end{cases}$ است، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = ۷ \\ cx + dy = -۱ \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۲y & ۰ & x \\ -x & y & ۱ \\ ۱ & ۲ & xy \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۷
۳) ۱۵-
۴) ۱۷-

۲۶) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^۳ + A^۲ + A - I)^{-1}$ کدام است؟

۱) I
۲) ۲I
۳) $-\frac{۱}{۲}I$
۴) ۲I-

۲۷) به ازای چند مقدار m، دستگاه معادلات $\begin{cases} (۲m + ۱)x - my = ۱ \\ -۷mx + (m + ۶)y = -m \end{cases}$، بی‌شمار جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۸) به ازای کدام مقدار m، دستگاه معادلات $\begin{cases} (m + ۱)x + ۳y = m \\ x + (m - ۱)y = ۲ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) ۲
۲) ۲-
۳) ۳
۴) ۳-

۲۹) اگر $(A - ۲I)^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A(A - ۲I)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۱۶

۳۰) اگر دو ماتریس مربعی A و B وارون یکدیگر، $A^۲ = A$ و $B^۲ = B$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(A + B)^۲ + (I - B)^۴ + (I - A)^۶$ کدام است؟

۱) ۴I
۲) ۲I
۳) ۲A + ۲B
۴) ۴A + ۴B

مدت زمان آزمون: -

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه ۳ فصل ۱ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & ۱ \\ ۱ & b & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۶-b & ۳ \\ a-۶ & ab+۱۲ & -۲a+۲ \\ ۰ & ۳b+۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a-۶=۰ \Rightarrow a=۶ \\ ۳b+۶=۰ \Rightarrow b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a-b=۸$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

در یک ماتریس قطری، درایه‌های خارج قطر اصلی همگی برابر صفر هستند، بنابراین داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} -۲ & b & -۱ \\ ۲ & ۱ & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -۲ \\ ۱ & a \\ ۲b & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲a-b & ۱+ab \\ ۲a+۱-۲ab & -۲a-۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+ab=۰ \Rightarrow ab=-۱ \qquad (*) \\ ۲a+۱-۲ab=۰ \xrightarrow{(*)} ۲a+۱-۲(-۱)=۰ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} b=\frac{۲}{۳}$$

$$a+b=-\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۳}=\frac{-۹+۴}{۶}=-\frac{۵}{۶}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} x & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^۲+y & xy+x \\ xy+y & y^۲+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۲ \\ ۱۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$(x^۲+y)-(y^۲+x)=(x^۲-y^۲)-(x-y)$$

$$=(x-y)(x+y-۱)=۱۸-۸=۱۰(۱)$$

$$(xy+x)-(xy+y)=x-y=۱۲-۱۰=۲(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲(x+y-۱)=۱۰$$

$$\Rightarrow x+y-۱=۵ \Rightarrow x+y=۶$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$A - A^{۲} - I = \overline{O} \Rightarrow A^{۲} = A - I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^{۴} = (A - I)^{۲}$$

$$\Rightarrow A^{۴} = A^{۲} - ۲A + I = (A - I) - ۲A + I = -A$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^{۸} = (-A)^{۲} = A^{۲}$$

$$\Rightarrow A^{۸} + A = A^{۲} + A = (A - I) + A = ۲A - I$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۹ & ۲۴ \\ ۴۰ & ۵۱ \end{bmatrix}$$

$$nA + nI = \begin{bmatrix} ۲m & ۳m \\ ۵m & ۶m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲m + n & ۳m \\ ۵m & ۶m + n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳m = ۲۴ \Rightarrow m = ۸$$

$$۶m + n = ۴۸ + n = ۵۱ \Rightarrow n = ۳$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x - y & -۱ \\ ۴y + z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & x + ۲z \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۳ \\ x + ۲z = -۱ \\ ۴y + z = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع‌سه‌رابطه}} ۳x + ۳y + ۳z = ۶$$

$$\xrightarrow{\div ۳} x + y + z = ۲$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

$$A^{2} = \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tan^{2}x - \frac{1}{\cos^{2}x} & -\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{\tan x}{\cos x} \\ \frac{\tan x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cos x} & -\frac{1}{\cos^{2}x} + \tan^{2}x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tan^{2}x - (1+\tan^{2}x) & 0 \\ 0 & -(1+\tan^{2}x) + \tan^{2}x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین برای ماتریس‌های A^{10}، A^{7} و A^{5} داریم:

$$A^{10} = (A^{2})^{5} = (-I)^{5} = -I$$

$$A^{7} = A^{6} \times A = (A^{2})^{3} \times A = (-I)^{3} \times A = -IA = -A$$

$$A^{5} = A^{4} \times A = (A^{2})^{2} \times A = (-I)^{2} \times A = IA = A$$

$$A^{10} + A^{7} + A^{5} = -I - A + A = -I$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$2A + B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 13 \\ 2 & 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

طرفین معادلهٔ (۲) را در ۲ ضرب کرده و با معادلهٔ (۱) جمع می‌کنیم. داریم:

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 25 \\ 5 & 20 & 15 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

⇒ مجموع درایه‌های A = ۱۸

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن سطر اول ماتریس $A^{۴}$، کافی است سطر اول ماتریس $A^{۲}$ را در همین ماتریس ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

کافی است سطر اول ماتریس $A^{۲}$ را به دست آورده و ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^{۲}\ \text{سطر اول} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}\ \text{سطر اول} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۸۶ \end{bmatrix}$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$|AB| = |A||B| = (\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲} - ۰)(\frac{۱}{۲} - \sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲})$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}) \times \frac{۱}{۲}(۱ - ۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲})$$

$$= \frac{۱}{۴} \times \sin\frac{\pi}{۶} \times \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۸}(۲\sin\frac{\pi}{۶}\cos\frac{\pi}{۶})$$

$$= \frac{۱}{۸} \times \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۸} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اتحادهای جبری تنها زمانی برای ماتریس‌های A و B برقرار هستند که این دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، بنابراین داریم:

$$BA = AB \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲a + c & ۳c \\ ۲d + b & ۳b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲a & ۲c \\ a + ۳d & c + ۳b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a + c = ۲a \Rightarrow c = ۰ \\ ۳b = c + ۳b \Rightarrow c = ۰ \\ ۳c = ۲c \Rightarrow c = ۰ \end{cases}$$

$$۲d + b = a + ۳d \Rightarrow a + d = b$$

حالت $c = d = ۰$ ممکن است رخ دهد اما لزوماً برقرار نیست.

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

طبق ویژگی دترمینان و با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x - ۲ \\ ۴ & -۱ & y - ۱ \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x \\ ۴ & -۱ & y \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= k + [(۰ - ۲ - ۲۴) - (۴ - ۹ + ۰)] = k - ۲۱$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

$$A(A - I) = I$$

$$\Rightarrow A^۲ - A \times I = I$$

$$\Rightarrow A^۲ - A = I$$

$$\Rightarrow A^۲ = A + I \xrightarrow{\times A} A^۳ = A^۲ + A = (A + I) + A = ۲A + I$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و $A^{-1} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ وارون آن است. با توجه به برابری دو ماتریس $\begin{bmatrix} a+۱ & -b \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ و در نتیجه مساوی بودن درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم این دو ماتریس، $|A| = ۱$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+۱ & -b \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = -۵ \Rightarrow c = ۵ \\ a = ۲ \\ d = a+۱ \Rightarrow d = ۳ \end{cases}$$

$$|A| = ۱ \Rightarrow ad - bc = ۱ \Rightarrow ۲ \times ۳ - ۵b = ۱ \Rightarrow ۵b = ۵ \Rightarrow b = ۱$$

$$a+b+c+d = ۲+۱+۵+۳ = ۱۱$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه۲

دو طرف تساوی $AX = A - ۲I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم. داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{۱}{۲\times۳-۱\times۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AX = A - ۲I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1}(A - ۲I)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X = \underbrace{A^{-1}A}_{I} - ۲A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X = I - ۲A^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۳ \\ ۱ & x^۲ & x^۲ \\ ۱ & x^۳ & x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (x^۳ - x^۵) - x(x - x^۲) + x^۳(x^۳ - x^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۳ - x^۵ - x^۲ + x^۳ + x^۶ - x^۵ = ۰ \Rightarrow x^۶ - ۲x^۵ + ۲x^۳ - x^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۳(۱ - x^۲) + x^۲(x^۴ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۳(x^۲ - ۱) + x^۲(x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲(x^۲ - ۱)(-۲x + x^۲ + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲(x^۲ - ۱)(x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm۱ \end{cases}$$

پس این معادله سه ریشه متمایز دارد.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آن‌گاه در حالت کلی $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$. از طرفی وارون وارون هر ماتریس برابر خود آن ماتریس است، پس ابتدا با وارون کردن ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1}، ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix} \Rightarrow B = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -۵ & ۷ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۷ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ۸ & -۱۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^{-1} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۱ & ۱۲ \\ -۱ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۳ \\ -\frac{۱}{۴} & ۲ \end{bmatrix}$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ماتریس $A - B$ درصورتی وارون‌پذیر نیست که دترمینان آن برابر صفر باشد. داریم:

$$A - B = \begin{bmatrix} ۲ & m+۲ \\ ۳ & m-۳ \end{bmatrix}$$

$$|A-B| = ۰ \Rightarrow (۶ - ۲m) - (۳m + ۶) = ۰ \Rightarrow -۵m = ۰ \Rightarrow m = ۰$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

$$AB^{-1} + I = AB^{-1} + BB^{-1} = (A+B)B^{-1}$$

$$\Rightarrow |AB^{-1} + I| = |A+B|\,|B^{-1}| = ۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه۴

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix} = (۰ + ۱۰ + ۷۲) - (۰ + ۶۰ - ۳) = ۸۲ - ۵۷ = ۲۵$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

برای دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B، رابطه $|AB| = |A|\,|B|$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\left|A^{۲}\left(B^{۲} - B + I\right)\right| = \left|A^{۲}\right| \times \left|B^{۲} - B + I\right|$$

$$\Rightarrow \left|A^{۲}B^{۲} - A^{۲}B + A^{۲}\right| = ۲ \times ۳ = ۶(۱)$$

از طرفی داریم:

$$A^{۲}B^{۲} = A \times \underbrace{A \times B}_{I} \times B = AB = I(۲)$$

$$A^{۲}B = A \times \underbrace{A \times B}_{I} = A(۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \left|I - A + A^{۲}\right| = ۶ \Rightarrow \left|A^{۲} - A + I\right| = ۶$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$|A| = ۲|A|^{۲} - ۶ \Rightarrow ۲|A|^{۲} - |A| - ۶ = ۰$$

$$(|A| - ۲)(۲|A| + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} |A| = ۲ \\ |A| = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

بنابراین قدرمطلق تفاضل مقادیر ممکن برای دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$۲ - (-\frac{۳}{۲}) = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

ماتریس $۲A - I$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(۲A - I)^{۲} = ۴A^{۲} - ۴A + I = ۴(A^{۲} - A) + I = ۴I + I = ۵I$$

$$\Rightarrow |۲A - I|^{۲} = |۵I| \Rightarrow |۲A - I|^{۲} = ۲۵ \Rightarrow |۲A - I| = \pm ۵$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

طبق تعریف ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ -۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} ۲۷ \\ -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = -۱ \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۲ \\ ۱ & -۱ & -۳ \\ -۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{دستور ساروس}} |B| = (-۳ + ۰ - ۴) - (-۶ - ۱۸ + ۰) = ۱۷$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۳

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I \xrightarrow{\times A} A^۳ = A$$

$$(A^۳ + A^۲ + A - I)^{-۱} = (-A - I + A - I)^{-۱} = (-۲I)^{-۱}$$

$$-۲I = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow (-۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲}I$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

دستگاه معادلات موردنظر در صورتی بی‌شمار جواب دارد که داشته باشیم:

$$\frac{۲m+۱}{-۷m} = \frac{-m}{m+۶} = \frac{۱}{-m}$$

$$(I)\quad \frac{۲m+۱}{-۷m} = \frac{۱}{-m} \Rightarrow -۲m^۲ - m = -۷m$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۶m = ۰ \Rightarrow ۲m(m - ۳) = ۰ \Rightarrow m = ۰ \quad \text{یا}\ m = ۳$$

$$(II)\quad \frac{-m}{m+۶} = \frac{۱}{-m} \Rightarrow m^۲ = m + ۶ \Rightarrow m^۲ - m - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (m - ۳)(m + ۲) = ۰ \Rightarrow m = ۳ \quad \text{یا}\ m = -۲$$

بنابراین یک جواب مشترک برای هر دو معادله وجود دارد: $m = ۳$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در صورتی فاقد جواب است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m+۱}{۱}=\frac{۳}{m-۱} \Rightarrow (m+۱)(m-۱)=۳$$

$$\Rightarrow m^۲-۱=۳ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm۲$$

حال به ازای هر یک از مقادیر به دست آمده، برقراری رابطهٔ $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ را بررسی می‌کنیم.

دستگاه جواب ندارد. $m=۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲-۱}\neq\frac{۲}{۲}$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد. $m=-۲ \Rightarrow \frac{۳}{-۲-۱}=\frac{-۲}{۲}$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$(A-۲I)(A-۲I)^{-۱}=I$$

$$\Rightarrow A(A-۲I)^{-۱}-۲I(A-۲I)^{-۱}=I$$

$$\Rightarrow A(A-۲I)^{-۱}=I+۲(A-۲I)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(A-۲I)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های ستون دوم $=۲+۳=۵$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

دو ماتریس A و B وارون یکدیگرند، پس $AB=BA=I$ است. داریم:

$$(I-A)^۲=I^۲-۲IA+A^۲=I-۲A+A=I-A$$

به طریق مشابه $(I-B)^۲=I-B$ است، در نتیجه تمامی توان‌های هر یک از دو ماتریس $I-A$ و $I-B$ با خود آن ماتریس برابر هستند. بنابراین داریم:

$$(I-A)^۶+(I-B)^۴+(A+B)^۲$$

$$=(I-A)+(I-B)+(A^۲+B^۲+۲AB)$$

$$=۲I-A-B+A+B+۲I=۴I$$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۲ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکامی کوچینگ
منصوررخشان

---

① در مثلث ABC ، ضلع BC و طول میانه وارد بر این ضلع ثابت هستند. مکان هندسی نقطه همرسی میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

۱) دو خط موازی با BC
۲) خطی عمود بر BC
۳) دایره‌ای مماس بر BC
۴) دایره‌ای به مرکز وسط ضلع BC

② دایرهٔ $C(O,R)$ در صفحه مفروض است. مکان هندسی مراکز دایره‌هایی به شعاع ۲R که بر دایره C مماس داخل باشند، کدام است؟

۱) دایرهٔ C
۲) دایره‌ای به شعاع R و مماس خارج با C
۳) خطی مماس بر دایرهٔ C
۴) دو قطر عمود بر هم در دایرهٔ C

③ در نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌کدام از این دو نقطه نیست در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی در این صفحه که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

④ دو خط متقاطع d و d′ را در نظر گرفته و نقطه تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. نقاطی که از دو خط d و d′ به یک فاصله بوده و از نقطه O به فاصله ۲ باشند، رئوس یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۶

⑤ خط d و نقاط A و B در صفحه مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه ممکن است در صفحه وجود داشته باشد که از خط d به فاصلهٔ ۳ و از نقاط A و B به یک فاصله باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) بی‌شمار

⑥ مستطیلی به طول اضلاع ۶ و ۹ و سکه‌ای به شعاع ۲ مفروض‌اند. سکه را روی مستطیل پرتاب می‌کنیم. اگر مرکز سکه درون مستطیل باشد، مساحت مکان هندسی مرکز سکه به شرط آنکه بخشی از سکه داخل مستطیل و بخشی از آن خارج مستطیل قرار داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۲۶
۳) ۲۸
۴) ۴۴

⑦ نقاط A، B و C در یک صفحه مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه ممکن است در این صفحه وجود داشته باشد که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد؟

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۲ **۴)** ۴

⑧ بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $x^2 + y^2 = 4y$ از خط $3x + 4y = 1$ کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۱/۴
۳) ۲/۲
۴) ۳/۴

۹) از بین دایره‌های گذرا از نقطه $A(1, -4)$ و مماس بر خط‌های $4x + 3y = 0$ و محور yها، بزرگ‌ترین شعاع دایره کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{17}{9}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{22}{9}$

۱۰) طول وتری از دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ که موازی محور xها بوده و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۱۱) اگر $x^2 + ay^2 + 2x - 4y = a$ معادلهٔ یک دایره باشد، شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{6}$
۳) ۴ ۴) $2\sqrt{6}$

۱۲) کوچکترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-4,1)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $1, -3$ ۲) $0, -3$ ۳) $2, -1$ ۴) $3, -2$

۱۳) اگر طول مماس رسم شده از نقطه $A(0,k)$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$، برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴) مکان هندسی پای ارتفاع‌های وارد از مبدأ مختصات بر خطوطی که از نقطه $M(2,3)$ می‌گذرند، کدام است؟

۱) خطی به معادلهٔ $2x - 3y = 1$ ۲) دایره‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$
۳) خطی به معادلهٔ $3x - 2y = 1$ ۴) دایره‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$

۱۵) معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1,2)$ و $(2,1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

۱) $y = 2x$ ۲) $y = 3x$ ۳) $3y = 2x$ ۴) $2y = 3x$

۱۶) به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $x^2 + 2mx + y^2 - m = 0$، یک دایره <u>نیست</u>؟

۱) $-1 \le m \le 0$ ۲) $m > 0$ یا $m < -1$
۳) $-1 < m < 0$ ۴) $\emptyset$

۱۷) در نقطه $A(2,1)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$، مماسی بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر این خط مماس، محورهای x و y را در نقاط B و C قطع کند، مساحت مثلث OBC کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۳ ۲) $\frac{25}{6}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) ۴

۱۸) شعاع دایره‌ای که از نقاط $A(-1,0)$ و $B(6,1)$ گذشته و خط $y = 2x$ شامل قطری از آن باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) ۵
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۶

۱۹) به ازای کدام مقدار a، زاویه بین خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله $3x + 2y = a$ در نقطه تلاقی آن‌ها بر روی دایره،۹۰درجه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰) وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 17$، با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(6,-1)$، بر خط به معادلهٔ $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۳ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

۲۱) در یک بیضی، عمودی که در نقطهٔ F (کانون بیضی) بر محور کانونی رسم می‌شود، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مماس بر بیضی در نقطهٔ M امتداد محور کانونی را در نقطهٔ P قطع می‌کند. اگر PM = ۵ و PF = ۴ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

۲۲) اگر نقطه $(-۰/۲۵ , -۲)$ F کانون سهمی $y^۲ + ay + bx + ۱ = ۰$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۲

۲۳) هر پرتویی که از نقطه $(۱,\frac{۱}{۲})$ بر یک سهمی با خط هادی به معادله $x = -\frac{۱}{۲}$ می تابد، در امتداد محور xها باز می‌تابد. این سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۴) اگر نقاط $F(۳,۱)$ و $F'(-۳,۱)$ کانون‌های یک بیضی و نقطهٔ $M(۵,۱)$ نقطه‌ای واقع بر آن بیضی باشد، طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۵) عمق دو آینه سهموی در مرکز آنها به‌ترتیب ۳۰ و ۴۰ سانتی‌متر و قطر قاعده این آینه‌ها به‌ترتیب ۶۰ و ۱۰۰ سانتی‌متر است. اگر فاصله کانونی آینه دوم برابر a باشد، فاصله کانونی آینه اول کدام است؟

۱) ۰/۴a ۲) ۰/۴۸a ۳) ۰/۵۴a ۴) ۰/۶a

۲۶) یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینهٔ سهموی است که فاصلهٔ کانونی آن ۳۶ سانتی متر و عمق آینه در مرکز آن ۶۴ سانتی‌متر است. قطر قاعدهٔ این آینه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۲

۲۷) F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۶ هستند. دایره‌ای به قطر FF'، بیضی را در چهار نقطه قطع کرده است. اگر M یکی از این چهار نقطه باشد، حاصل $MF \times MF'$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۲۸) فرض کنید F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر بزرگ $۳\sqrt{۵}$ بوده و M نقطه‌ای روی این بیضی باشد به گونه‌ای که MF و MF' برهم عمودند. اگر $MF \times MF' = ۱۰$ باشد، آنگاه فاصله دو کانون این بیضی کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۲۹) مختصات کانون سهمی به معادله $۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴$ کدام است؟

۱) $(۱, \frac{۵}{۴})$ ۲) $(۱, \frac{۱۳}{۸})$ ۳) $(\frac{۱}{۴}, ۲)$ ۴) $(\frac{۵}{۸}, ۲)$

۳۰) معادله مکان هندسی کانون سهمی‌هایی که خط $x = ۱$ ، خط هادی آن‌ها و $M(۳,۱)$ نقطه‌ای واقع بر آن‌ها باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۶ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y + ۶ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y + ۹ = ۰$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

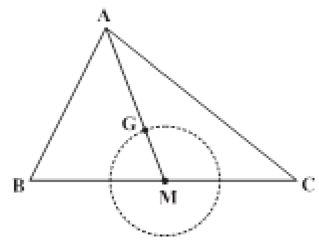
نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۲ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکامی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴



فرض کنید مثلث ABC رسم شده و G نقطه همرسی میانه‌های این مثلث باشد. می‌دانیم میانه‌های یک مثلث یکدیگر را به‌نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین $GM = \frac{1}{3}AM$ است و با توجه به ثابت بودن طول میانه AM ، طول پاره‌خط GM نیز ثابت است. از طرفی با توجه به ثابت بودن ضلع BC، نقطه M وسط ضلع BC نیز ثابت است. بنابراین مکان هندسی نقطه همرسی میانه‌های مثلث ABC، روی دایره‌ای به مرکز M و به شعاع $\frac{1}{3}AM$ قرار دارد. (به جز نقاط برخورد این دایره با ضلع BC یا امتداد آن).

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

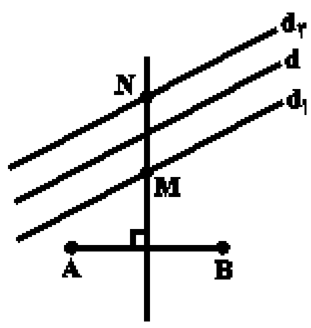
گزینه‌ی «۱»

فرض کنید O′ مرکز دایره‌ای به شعاع ۲R باشد که بر دایرهٔ C مماس داخل است. در این صورت داریم: $OO' = |2R - R| = R$ یعنی نقطهٔ O′ به فاصلهٔ R از نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ C) قرار دارد، پس دقیقاً بر روی دایرهٔ C واقع است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



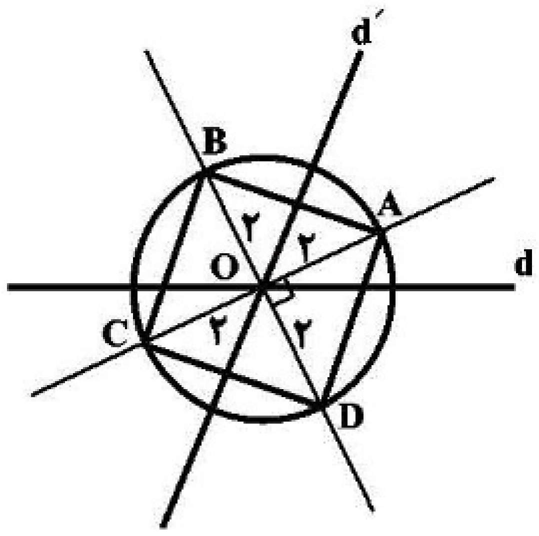
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط AB (خط ℓ) و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن و در طرفین آن (خطوط d_1 و d_2) است. در حالت کلی مسئله دو جواب دارد (نقاط M و N)، ولی درصورتی که هر دو خط d_1 و d_2 موازی با خط ℓ (عمودمنصف پاره‌خط AB) باشند، مسئله جواب ندارد و درصورتی که یکی از دو خط d_1 یا d_2 برخط ℓ منطبق شود، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله باشند، نیمسازهای چهار زاویه تشکیل شده توسط دو خط هستند که دو خط عمود بر هم می باشند. (نیمسازهای زوایای مکمل و مجاور، بر هم عمودند.)



از طرفی نقاطی که از نقطه O به فاصله ۲ می‌باشند، بر یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ واقع‌اند. نقاط برخورد این دایره با نیمسازها، جواب مسئله می‌باشند.

در چهارضلعی ABCD، قطرها عمودمنصف هم و هم‌اندازه بوده و بنابراین چهارضلعی مربع است. در نتیجه داریم:

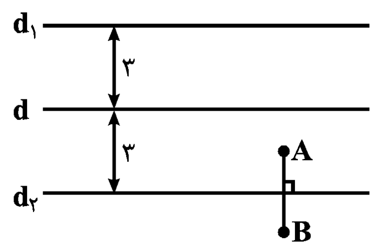
$S_{ABCD} = \frac{۴^۲}{۲} = ۸$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

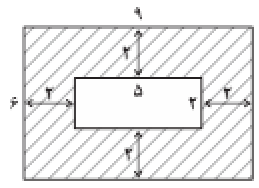
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ واحد باشند، دو خط موازی با d در طرفین آن است. هم‌چنین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB مطابق شکل بر یکی از دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ واحد از آن منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.



سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

در صورتی بخشی از سکه داخل مستطیل و بخشی از آن خارج مستطیل قرار می‌گیرد که مرکز سکه حداکثر به فاصله ۲ واحد از محیط مستطیل واقع شود. در این صورت مرکز سکه باید داخل ناحیه هاشورخورده در شکل قرار گیرد.



مطابق شکل داریم:

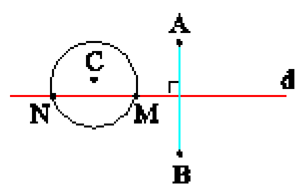
هاشور خورده $= ۹ \times ۶ - ۵ \times ۲ = ۵۴ - ۱۰ = ۴۴$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. از طرفی مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ سانتی‌متر است. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ مفروض را در دو نقطه قطع کند، مسئله دارای حداکثر جواب یعنی دو نقطه است. (نقاط M و N روی شکل).



سوال ۸

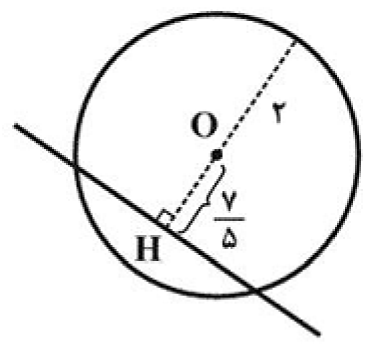
پاسخ: گزینه ۴

$$x^۲ + y^۲ = ۴y \Rightarrow (x - ۰)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow O(۰,۲) \; , \; R = ۲$$

فاصله مرکز دایره از خط برابر است با:

$$\xrightarrow[O(۰,۲)]{۳x+۴y=۱} OH = \frac{|۳\times۰+۴\times۲-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$



پس خط، دایره را قطع می‌کند و در نتیجه بیش‌ترین فاصله برابر است با:

$$OH + R = ۱/۴ + ۲ = ۳/۴$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

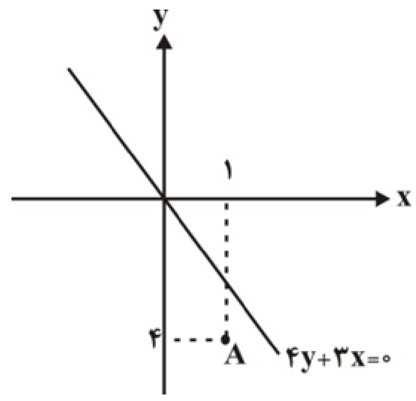
گزینه «۲»

مرکز دایره از محور yها (خط $x = 0$) و خط $4x + 3y = 0$ به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$\frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}} = |x| \Rightarrow |4x + 3y| = 5|x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 5x \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \\ 4x + 3y = -5x \Rightarrow y = -3x \end{cases}$$

مطابق شکل برای اینکه دایره از نقطه $A(1,-4)$ بگذرد و بر محور yها و خط $4x + 3y = 0$ مماس باشد لزوماً باید در ناحیه چهارم دستگاه مختصات قرار بگیرد و در نتیجه مرکز آن روی خط $y = -3x$ واقع است.



مرکز دایره از نقطه A و محور yها به یک فاصله است بنابراین داریم:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = |x| \xrightarrow{y=-3x}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-3x+4)^2} = |x| \longrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 24x + 16 = x^2 \Rightarrow 9x^2 - 26x + 17 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{17}{9} \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار شعاع، برابر $R = \frac{17}{9}$ است.

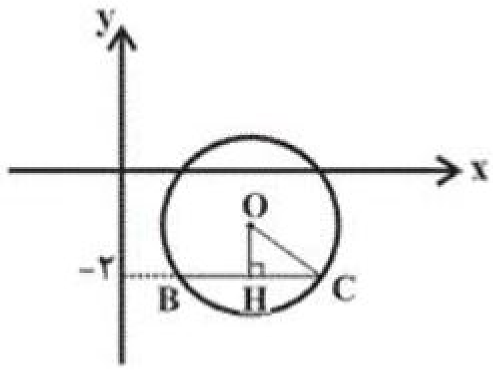
سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

مرکز و شعاع دایره عبارت‌اند از: $O(۲,-۱)$: مرکز دایره

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲ - ۴(۳)} = \sqrt{۲}$$

معادله خطی که شامل وتری از این دایره (وتر BC) که موازی محور xها بوده و از نقطه $A(۱,-۲)$ عبور می‌کند، به‌صورت $y = -۲$ است. فاصله مرکز دایره از این خط مطابق شکل برابر ۱ است. بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{OHC} : CH^۲ = OC^۲ - OH^۲ = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow CH = ۱ \Rightarrow BC = ۲$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

در معادلهٔ دایره، ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یکدیگر است، پس $a = ۱$ و در نتیجه داریم:

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y - ۱ = ۰ : \text{معادلهٔ دایره}$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ - ۴(-۱)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴} = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۶} = \sqrt{۶} : \text{شعاع دایره}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

کوچک ترین دایره گذرنده از نقاط A و B، دایره‌ای است که نقاط A و B دو سر قطری از آن هستند. مرکز این دایره نقطه M وسط پاره خط AB و شعاع آن برابر نصف طول پاره خط AB است.

$$M = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۲-۴}{۲}, \frac{۵+۱}{۲}\right) = (-۱, ۳)$$

$$R = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{(۲+۴)^۲+(۵-۱)^۲}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$

معادله دایره : $(x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲ + ۹ = ۱۳$

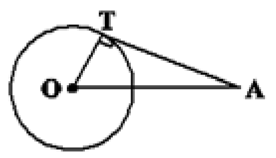
$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ x+۱ = -۲ \Rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

$$x^۲ + y^۲ - x - y - ۲ = ۰$$

مرکز دایره : $O(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$



شعاع دایره : $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲ - ۴(-۲)} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

$$OA = \sqrt{(۰ - \frac{۱}{۲})^۲ + (k - \frac{۱}{۲})^۲} \Rightarrow OA^۲ = (k - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۴}$$

$$O\overset{\Delta}{A}T : OA^۲ = AT^۲ + OT^۲ \Rightarrow (k - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۴} = ۴ + \frac{۱۰}{۴}$$

$$\Rightarrow (k - \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

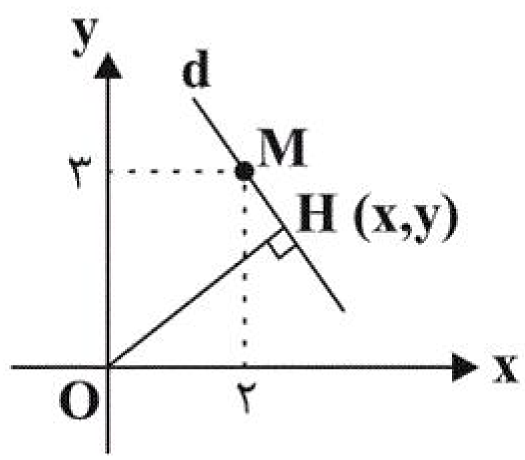
$$\Rightarrow k^۲ - k - ۶ = ۰$$

$\Rightarrow$ مجموعه مقادیر k $= -\frac{b}{a} = -\frac{(-۱)}{۱} = ۱$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید نقطهٔ $H(x,y)$ پای ارتفاع وارد از مبدأ مختصات بر خطی گذرنده از نقطهٔ $M(۲,۳)$ باشد، در این صورت داریم:



$$m_{OH} \times m_d = -۱ \Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-۳}{x-۲} = -۱$$

$$\Rightarrow y(y-۳) = -x(x-۲) \Rightarrow x(x-۲) + y(y-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳y = ۰$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ H، دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳y = ۰$ است.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۲

معادلات دو دایره عبارتند از:

$$C_۱ : (x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$$

$$C_۲ : (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y + ۱ = ۰$$

اگر معادله دایره $C_۲$ را از معادله دایره $C_۱$ کم کنیم، معادله وتر مشترک دو دایره حاصل می‌شود:

$$۶x - ۲y = ۰ \Rightarrow y = ۳x$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ متعلق به یک دایره است، هرگاه $a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰$.

بنابراین کافی است داشته باشیم:

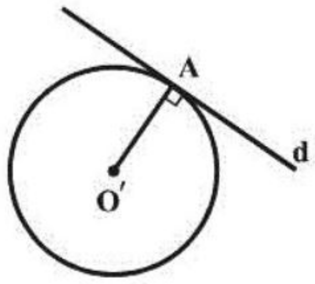
$$a^۲ + b^۲ - ۴c \le ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ + ۰^۲ - ۴(-m) \le ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ + ۴m \le ۰ \Rightarrow ۴m(m+۱) \le ۰ \Rightarrow -۱ \le m \le ۰$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

O′A بر خط d عمود است. شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است. بنابراین شیب خط d، قرینه معکوس شیب O′A است. داریم:



$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow O'(۱, -۲) \Rightarrow m_{O'A} = \frac{y_A - y_{O'}}{x_A - x_{O'}}$$

$$= \frac{۱-(-۲)}{۲-۱} = ۳ \Rightarrow m_d = -\frac{۱}{۳}$$

$$\text{معادله خط } d : y - ۱ == -\frac{۱}{۳}(x - ۲)$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳y - ۳ = -x + ۲ \Rightarrow x + ۳y = ۵$$

حال نقاط تقاطع این خط با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:

$$x + ۳y = ۵ \xrightarrow{y=۰} x = ۵ \Rightarrow B(۵, ۰)$$

$$x + ۳y = ۵ \xrightarrow{X=۰} y = \frac{۵}{۳} \Rightarrow C(۰, \frac{۵}{۳})$$

پس مساحت مثلث OBC برابر $\frac{۲۵}{۶} = \frac{۱}{۲}(۵ \times \frac{۵}{۳})$ است.

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha, ۲\alpha)$ است. نقاط A و B از مرکز دایره به یک فاصله هستند (این فاصله برابر شعاع دایره است)، پس داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha + ۱)^۲ + (۲\alpha - ۰)^۲} = \sqrt{(\alpha - ۶)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۲} \alpha^۲ + ۲\alpha + ۱ + ۴\alpha^۲ = \alpha^۲ - ۱۲\alpha + ۳۶ + ۴\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱ = ۵\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۳۷$$

$$\Rightarrow ۱۸\alpha = ۳۶ \Rightarrow \alpha = ۲$$

$$R = OA = \sqrt{(۲ + ۱)^۲ + (۲ \times ۲)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۱

خط مماس بر دایره در نقطه تماس، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است. بنابراین خط $۳x + ۲y = a$، در راستای یکی از شعاع‌های دایره (خط قائم بر دایره) است و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند. داریم:

$$\text{مرکز دایره}: O(۱, -\tfrac{۱}{۲}) \Rightarrow ۳(۱) + ۲(-\tfrac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ C به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ باشد. برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = x^۲ + y^۲ - ۱۷ \Rightarrow ax + by = -c - ۱۷$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $۲x - y = ۳$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{۲} = \frac{b}{-۱} = \frac{-c-۱۷}{۳} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲b \\ c = ۳b - ۱۷ \end{cases}$$

نقطهٔ $(۶, -۱)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$x^۲ + y^۲ - ۲bx + by + ۳b - ۱۷ = ۰$$

$$\xrightarrow{(۶,-۱)} ۳۶ + ۱ - ۱۲b - b + ۳b - ۱۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰b = ۲۰ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۴ \\ c = -۱۱ \end{cases}$$

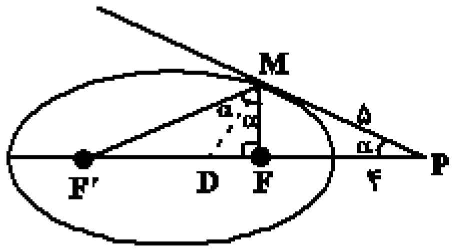
$$\text{شعاع دایره}: R = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۱۶+۴+۴۴}}{۲} = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = ۴$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

کانون دیگر بیضی را F' می‌نامیم، خط مماس بر بیضی نیمساز خارجی زاویهٔ $F\hat{M}F'$ است.



اگر نیمساز داخلی زاویهٔ $F\hat{M}F'$ با محور کانونی در D متقاطع باشد، آن‌گاه $F'D = F\hat{M}D = \hat{P} = \alpha$ است، پس داریم:

$$FM = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{DF}{MF} = \frac{۳}{۴}$$

همچنین طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث MFF' داریم:

$$\frac{DF}{DF'} = \frac{MF}{MF'} \Rightarrow \frac{DF}{MF} = \frac{DF'}{MF'} = \frac{DF+DF'}{MF+MF'} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۲c}{۲a} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با تبدیل معادله سهمی به حالت متعارف داریم:

$$y^۲ + ay + bx + ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ + ay + \frac{a^۲}{۴} = -bx - ۱ + \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{a}{۲}\right)^۲ = -b\left(x + \frac{۱ - \frac{a^۲}{۴}}{b}\right)$$

محور تقارن سهمی موازی محور xها است. پس عرض رأس سهمی و در نتیجه عرض کانون سهمی برابر $-\frac{a}{۲}$ است. داریم:

$$-\frac{a}{۲} = -۲ \Rightarrow a = ۴$$

با فرض $b < ۰$ سهمی رو به راست باز می‌شود. همچنین طول رأس با جایگذاری مقدار $a = ۴$ برابر $\frac{۳}{b}$ است داریم:

$$\text{طول کانون} = \frac{۳}{b} - \frac{b}{۴} = -\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴b} ۱۲ - b^۲ = -b \Rightarrow b^۲ - b - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (b - ۴)(b + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \\ b = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

نقطه $F(۱, \frac{۱}{۲})$ کانون این سهمی است. با توجه به مختصات کانون و معادله خط هادی، دهانه سهمی رو به راست است و رأس سهمی دقیقاً وسط کانون و خط هادی، یعنی نقطه $A(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲})$ است. همچنین فاصله کانونی سهمی، برابر فاصله رأس تا کانون، یعنی $a = \frac{۳}{۴}$ است و در نتیجه داریم:

معادله سهمی : $(y - \frac{۱}{۲})^۲ = ۳(x - \frac{۱}{۴})$

$\xrightarrow{y=۰} \frac{۱}{۴} = ۳x - \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$MF = \sqrt{(۳ - ۵)^۲ + (۱ - ۱)^۲} = ۲$

$MF' = \sqrt{(-۳ - ۵)^۲ + (۱ - ۱)^۲} = ۸$

$MF + MF' = ۲a \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

$FF' = \sqrt{(-۳ - ۳)^۲ + (۱ - ۱)^۲} = ۶ \Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = ۴$

طول قطر کوچک بیضی $= ۲b = ۲ \times ۴ = ۸$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

اگر a فاصله کانونی، d قطر قاعده و h عمق (گودی) یک آینه سهموی باشد، آنگاه رابطه $a = \frac{d^۲}{۱۶h}$ برقرار است. داریم:

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{\frac{d_۱^۲}{۱۶h_۱}}{\frac{d_۲^۲}{۱۶h_۲}} = \left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲ \times \left(\frac{h_۱}{h_۲}\right) = \left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)^۲ \times \frac{۴۰}{۳۰}$$

$$= \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۹}{۲۵} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۲}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{a_۲ = a} \frac{a_۱}{a} = ۰/۴۸ \Rightarrow a_۱ = ۰/۴۸a$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

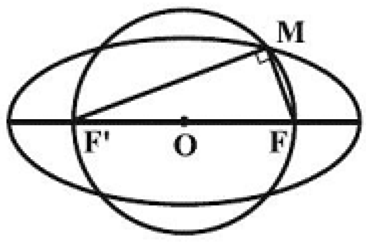
گزینه «۴»

اگر فاصلهٔ کانونی این آینهٔ سهموی را با a و قطر قاعده و عمق آینه در مرکز آن را به ترتیب با d و h نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$a = \frac{d^۲}{۱۶h} \Rightarrow d^۲ = ۱۶ah = ۱۶ \times ۳۶ \times ۶۴$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}} d = ۴ \times ۶ \times ۸ = ۱۹۲$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۱



$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

چون M نقطه‌ای روی بیضی است، پس $MF + MF' = ۲a$ و چون M روی دایره‌ای به قطر FF' قرار دارد، پس MF و MF' بر هم عمودند. بنابراین:

$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴c^۲$$

حال داریم:

$$(MF + MF')^۲ = MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF'$$

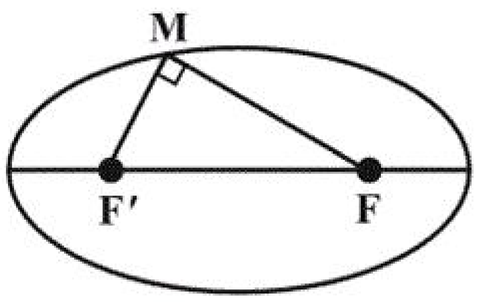
$$\Rightarrow MF \times MF' = \frac{۱}{۲}\left[\underbrace{(MF + MF')^۲}_{۴a^۲} - \underbrace{(MF^۲ + MF'^۲)}_{۴c^۲}\right]$$

$$= ۲(a^۲ - c^۲) = ۲b^۲ = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است. بنابراین داریم:



$$MF + MF' = ۳\sqrt{۵} \Rightarrow (MF + MF')^{۲} = (۳\sqrt{۵})^{۲}$$

$$\Rightarrow MF^{۲} + MF'^{۲} + ۲\underbrace{MF \times MF'}_{۱۰} = ۴۵ \Rightarrow MF^{۲} + MF'^{۲} = ۲۵$$

$$M\overset{\Delta}{F}F' : FF'^{۲} = MF^{۲} + MF'^{۲} = ۲۵ \Rightarrow FF' = ۵$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه۲

معادله سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲x^{۲} - ۴x + ۳y = ۴ \Rightarrow ۲(x^{۲} - ۲x + ۱) - ۲ = -۳y + ۴$$

$$\Rightarrow ۲(x - ۱)^{۲} = -۳y + ۶ \Rightarrow (x - ۱)^{۲} = -\frac{۳}{۲}(y - ۲)$$

با توجه به معادله استاندارد سهمی، سهمی قائم است و دهانه آن رو به پایین باز می‌شود. همچنین $A = (۱, ۲)$ رأس سهمی است و داریم:

$$۴a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۸}$$

اگر $A = (h, k)$ رأس یک سهمی قائم باشد، آنگاه $F = (h, k + a)$ کانون آن سهمی است، بنابراین داریم:

کانون سهمی : $F(۱, ۲ - \frac{۳}{۸}) = (۱, \frac{۱۳}{۸})$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

هر نقطه واقع بر یک سهمی از کانون و خط هادی آن سهمی به یک فاصله است، بنابراین اگر $F(x, y)$ کانون یکی از این سهمی‌ها باشد، آنگاه با توجه به اینکه فاصله نقطه M از خط هادی سهمی برابر ۲ است، داریم:

$$MF = ۲ \Rightarrow \sqrt{(x - ۳)^{۲} + (y - ۱)^{۲}} = ۲$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۶x + ۹ + y^{۲} - ۲y + ۱ = ۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۶x - ۲y + ۶ = ۰$$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

---

۱) نقاط $A = (۲,۳,۴)$ و $B = (-۲,-۵,۰)$ مفروض‌اند. اگر نقطه M بر روی پاره‌خط AB چنان قرار داشته باشد که $\overrightarrow{MA} = -۳\overrightarrow{MB}$، مختصات نقطه M کدام است؟

۱) $(-۱, -۴, ۱)$ ۲) $(-۲, -۳, -۱)$ ۳) $(۲, ۳, ۱)$ ۴) $(-۱, -۳, ۱)$

۲) اگر نقطهٔ M محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD به رئوس $A = (۱,۳,۳)$، $B = (۳,۱,۰)$، $C = (۳,-۱,۱)$ باشد، محل تلاقی میانه‌های مثلث DMC کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{۳}, ۲, ۲)$ ۲) $(۲, \frac{۱}{۳}, \frac{۷}{۳})$
۳) $(۲, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(۱, \frac{۱}{۳}, ۲)$

۳) اگر نقاط $A = (-۱,۰,۰)$ ، $B = (۲,۰,\sqrt{۷})$ و $C = (۳,\sqrt{۲},\sqrt{۷})$، سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۸۷}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶۳}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۵۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷۹}}{۲}$

۴) دو نقطهٔ $A = (-۱,۲,۱)$ و $B = (-۳,۰,۱)$ مفروضند. از وسط پاره‌خط AB، برداری هم‌ارز با بردار $\vec{a} = (k^۲ + ۱, -k, k - ۱)$ رسم می‌کنیم که انتهای آن، نقطهٔ $(۳,۳,-۲)$ است. k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲
۳) ±۲ ۴) ±۴

۵) نقاط $A = (۱,-۳,۰)$ و $B = (۲,۱,۱)$ مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{AM} = ۲\overrightarrow{MB}$، آنگاه مختصات نقطهٔ M کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲}, -۱, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۵}{۳}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$.
۳) $(۱, -\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(۳, -۲, ۱)$

۶) وجه‌های یک مکعب مستطیل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = -۱$، $x = ۳$، $y = ۱$، $y = ۳$، $z = -۲$ و $z = ۱$ هستند. کدام یک از نقاط زیر دقیقاً بر دو وجه این مکعب واقع شده است؟

۱) $(-۱,۱,۱)$ ۲) $(۳,۳,۳)$ ۳) $(۰,۱,-۲)$ ۴) $(۱,۳,-۱)$

۷) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD(AB||CD)، بردار $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ کدام است؟

۱) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ۲) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
۳) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ ۴) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

۸) اگر دو بردار $\vec{a} = (m, m - ۲, n)$ و $\vec{b} = (n, -n, ۲m + n)$ موازی باشند، حاصل $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟ $(n > ۰)$

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۹) مجموع مقادیر m که به ازای آنها نقطهٔ $A = (۱, m - ۱, ۱)$ از دو صفحهٔ xz و xy به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۲

۱۰) وجه‌های یک مکعب مستطیل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = ۱$، $x = ۳$، $y = -۱$، $y = ۳$، $z = -۲$، $z = ۲$ هستند. کدام‌یک از نقاط زیر روی یکی از وجه‌های مکعب و غیر واقع بر یال‌های آن است؟

۱) $A = (۱, ۳, ۲)$
۲) $B = (۳, ۱, -۲)$
۳) $C = (۰, -۱, ۱)$
۴) $D = (۲, ۰, -۲)$

۱۱) اگر طول تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۱, m - ۱, ۱)$ روی بردار $\vec{b} = (m - ۱, ۱, ۰)$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

۱۲) مساحت مثلث ABC که رئوس آن نقاط $A = (-۱, ۰, ۱)$، $B = (۲, ۱, ۰)$ و $C = (۰, -۱, ۱)$ باشند، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۵}{۳}\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۳) کدام‌یک از ویژگی‌های زیر از خواص ضرب داخلی بردارها <u>نیست</u>؟

۱) $\vec{a} . \vec{b} = \vec{b} . \vec{a}$
۲) $\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c}$
۳) $\vec{a} . \vec{b} = ۰ \Rightarrow \vec{a} = \vec{o}$ یا $\vec{b} = \vec{o}$
۴) $|\vec{a} . \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

۱۴) اگر اندازه بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ و $۲\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c} + \vec{b} . \vec{c}$ کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) -۲/۵
۴) -۱/۵

۱۵) اگر بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۱)$ و $\vec{b} = (۱, ۲, -۱)$، دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، آنگاه طول بزرگ‌ترین قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$
۲) ۴
۳) $\sqrt{۱۴}$
۴) ۳

۱۶) اگر $|\vec{a}| = ۲$، $|\vec{b}| = ۳$ و زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۱۲۰° باشد، اندازهٔ بردار $(۲\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + ۲\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۵
۳) $۹\sqrt{۳}$
۴) $۱۵\sqrt{۳}$

۱۷) به ازای کدام مقدار m، چهار نقطه $A = (۱, ۰, ۲)$، $B = (-۱, ۲, ۰)$، $C = (۳, ۱, ۱)$ و $D = (۰, ۱, m)$ روی یک صفحه قرار دارند؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸) سه بردار $\vec{a} = (۱, ۳, -۱)$، $\vec{b} = (۲, m, ۱)$ و $\vec{c} = (۱, m - ۱, ۱)$ در یک صفحه قرار دارند. m کدام است؟

۱) ۲
۲) صفر
۳) ۱
۴) -۱

۱۹) اگر $|\vec{a}| = ۲$، $|\vec{b}| = ۴$ و $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱۳۵°
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) ۱۲۰°

۲۰) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۵\sqrt{۵}$ و $\vec{a}.\vec{b} = -۱$ باشد، آنگاه $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$
۲) ۶
۳) ۴
۴) $\sqrt{۱۱}$

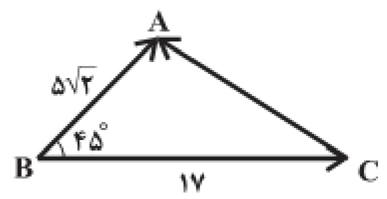
۲۱) به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a} = (-۱,۲,۳)$، $\vec{b} = (۲,۰,۱)$ و $\vec{c} = (-۴,m,۵)$ در یک صفحه‌اند؟

۱) ۲-
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۲) اگر نقاط $A = (۰,-۱,-۲)$، $B = (۳,۱,۴)$ و $C = (۵,۷,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، زاویه رأس A کدام است؟

۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) ۹۰°

۲۳) در شکل مقابل، حاصل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟



۱) ۱۶۰-
۲) ۱۹۰-
۳) ۲۰۰-
۴) ۲۰۴-

۲۴) نقطه O محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD است. اگر $\overrightarrow{AO} = ۲\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ و $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشند، حاصل $|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۲

۲۵) دو بردار $\vec{a} = (۱,۲,m)$ و $\vec{b} = (n,۱,۲)$ مفروض‌اند. تصویر بردار $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ روی محور xها برابر ۱ و طول تصویر بردار $\vec{c}$ روی صفحه xz برابر ۲ است. مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

۲۶) طول تصویر قائم بردار $\vec{u} = (۳\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k})$ بر صفحه xy، چند برابر طول تصویر قائم آن بر صفحه yzاست؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۷) اگر $۲x - y + ۲z = ۶$ باشد، حداقل مقدار $x^۲ + y^۲ + z^۲$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

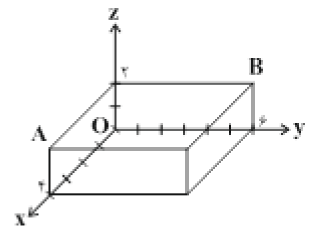
۲۸) اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، حداکثر مقدار عبارت $\frac{(۴a+b+c)^۲}{۴a^۲+b^۲+c^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۲۹) اگر $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{۳}$ و $\vec{a}.\vec{b} = ۱$ باشد، طول تصویر قائم $\vec{a}$ بر راستای $\vec{b}$، چند برابر $|\vec{a}|$ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۰) در شکل زیر که یک مکعب مستطیل روی محورهای مختصات تشکیل شده است، اگر O' نقطه برخورد قطرهای مکعب مستطیل باشد، مقدار $\cos\left(\widehat{AO'B}\right)$ کدام است؟



۱) $\frac{-5}{6}$

۲) $-\frac{3}{4}$

۳) $\frac{-6}{7}$

۴) $\frac{-2}{3}$

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه۳فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹

آکادمی کوچینگ
منصوررخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\overrightarrow{MA} = -۳\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = (-۳)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow ۴\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + ۳\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۴}(\overrightarrow{OA} + ۳\overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۴}[(۲,۳,۴) + (-۶,-۱۵,۰)] = (-۱,-۳,۱)$$

بنابراین مختصات نقطه M به‌صورت $(-۱,-۳,۱)$ است.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

ابتدا مختصات نقطهٔ D رأس چهارم متوازی‌الاضلاع را بدست می‌آوریم:

$$A + C = B + D \Rightarrow (۱,۳,۳) + (۳,-۱,۱) = (۳,۱,۰) + D$$

$$\Rightarrow D = (۴,۲,۴) - (۳,۱,۰) = (۱,۱,۴)$$

حال مختصات M محل تلاقی قطرها را پیدا می‌کنیم:

$$M = \frac{A+C}{۲} = \frac{(۱,۳,۳)+(۳,-۱,۱)}{۲} = (۲,۱,۲)$$

اگر G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث DMC باشد، آنگاه داریم:

$$G = \frac{D+M+C}{۳} = \frac{(۱,۱,۴)+(۲,۱,۲)+(۳,-۱,۱)}{۳} = (۲,\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$$M = \frac{B+C}{۲} = (\frac{۵}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۷})$$

$$AM = \sqrt{(\frac{۷}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\sqrt{۷})^۲} = \sqrt{\frac{۴۹}{۴} + \frac{۲}{۴} + ۷}$$

$$= \sqrt{\frac{۷۹}{۴}} = \frac{\sqrt{۷۹}}{۲}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم.

$$M = (\frac{-۳-۱}{۲}, \frac{۰+۲}{۲}, \frac{۱+۱}{۲}) = (-۲, ۱, ۱)$$

$$(-۲, ۱, ۱) + (k^۲ + ۱, -k, k - ۱) = (۳, ۳, -۲)$$

$$\Rightarrow (k^۲ - ۱, -k + ۱, k) = (۳, ۳, -۲)$$

$$\begin{cases} k^۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow k^۲ = ۴ \Rightarrow k = \pm ۲ \\ -k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = -۲ \\ k = -۲ \end{cases} \quad \Rightarrow k = -۲$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

اگرOمبدأ مختصات باشد، آنگاه مطابق فرض داریم:

$$\overrightarrow{AM} = ۲\overrightarrow{MB} \Rightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = ۲(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow ۳\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + ۲\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA} + ۲\overrightarrow{OB}) = \frac{۱}{۳}[(۱, -۳, ۰) + (۴, ۲, ۲)]$$

$$= \frac{۱}{۳}(۵, -۱, ۲) = (\frac{۵}{۳}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۱»: نقطه $(-۱, ۱, ۱)$ یکی از رأس‌های مکعب مستطیل است و بر سه وجه به معادلات $\begin{cases} x = -۱ \\ ۱ \le y \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۱ \end{cases}$، $\begin{cases} y = ۱ \\ -۱ \le x \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} z = ۱ \\ -۱ \le x \le ۳ \\ ۱ \le y \le ۳ \end{cases}$ واقع است.

گزینه «۲»: نقطه $(۳, ۳, ۳)$ خارج مکعب قرار دارد.

گزینه «۳»: نقطه $(۰, ۱, -۲)$ دقیقاً بر دو وجه به معادلات $\begin{cases} y = ۱ \\ -۱ \le x \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} z = -۲ \\ -۱ \le x \le ۳ \\ ۱ \le y \le ۳ \end{cases}$ واقع است.

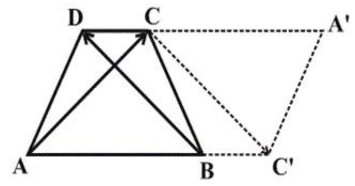
گزینه «۴»: نقطه $(۱, ۳, -۱)$ فقط بر یک وجه به معادله $\begin{cases} y = ۳ \\ -۱ \le x \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۱ \end{cases}$ واقع است.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

مطابق شکل، ذوزنقهٔ $A'CBC'$ را هم‌نهشت با ذوزنقهٔ $ABCD$ رسم می‌کنیم.



بردار $\overrightarrow{DB}$ هم‌اندازه و هم‌جهت با بردار $\overrightarrow{CC'}$ است. بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}$$

از طرفی داریم $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{DC}$. پس:

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

بردارهای $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ که مؤلفه‌هایشان غیرصفر هستند، موازی‌اند اگر و فقط اگر $\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$. طبق فرض، چون $n>۰$ است پس مؤلفه‌های دو بردار موازی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیرصفر است و داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{m-۲}{-n}=\frac{n}{۲m+n}\xrightarrow{\text{تساوی سمت چپ}}m=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱-۲}{-n}=\frac{n}{۲(۱)+n}\Rightarrow n^۲-n-۲=۰\xrightarrow{n>۰}n=۲$$

$$\Rightarrow\vec{a}=(۱,-۱,۲)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{۶}\,,\quad\vec{b}=(۲,-۲,۴)\Rightarrow|\vec{b}|=۲\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{۱}{۲}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰,y_۰,z_۰)$ از صفحات xz و xy به‌ترتیب برابر $|y_۰|$ و $|z_۰|$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$|m-۱|$: فاصلهٔ $(۱,m-۱,۱)$ از صفحهٔ xz

۱ : فاصلهٔ $(۱,m-۱,۱)$ از صفحهٔ xy

$$\Rightarrow|m-۱|=۱\Rightarrow\begin{cases}m-۱=۱\Rightarrow m=۲\\ m-۱=-۱\Rightarrow m=۰\end{cases}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

نقطه $D(۲,۰,-۲)$ بر روی یکی از وجه‌های مکعب به معادله $\begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ z = -۲ \end{cases}$ قرار دارد ولی روی هیچ‌یک از یال‌های مکعب واقع نیست. نقطه $A(۱,۳,۲)$ یکی از رأس‌های مکعب (محل تقاطع سه یال) است. نقطه $B(۳,۱,-۲)$ نیز روی یکی از یال‌های مکعب واقع شده که محل تقاطع دو وجه به معادلات $\begin{cases} x = ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۲ \end{cases}$ و $\begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ z = -۲ \end{cases}$ است. نقطه $C = (۰,-۱,۱)$ خارج مکعب واقع شده است.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{|(m-۱)+(m-۱)+۰|}{\sqrt{(m-۱)^۲+۱}} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲|m-۱|}{\sqrt{(m-۱)^۲+۱}} = \sqrt{۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴(m-۱)^۲ = ۳(m-۱)^۲ + ۳$$

$$\Rightarrow (m-۱)^۲ = ۳ \Rightarrow m^۲ - ۲m + ۱ = ۳ \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{-۲}{۱} = ۲$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینۀ «۳»

مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ می‌باشد.

$\overrightarrow{AB} = (۳,۱,-۱)$ و $\overrightarrow{AC} = (۱,-۱,۰)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - ۴\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲ + (-۴)^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه $\vec{a}.\vec{b} = ۰$ است، بنابراین گزینهٔ «۳» از ویژگی‌های ضرب داخلی بردارها نیست.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

$$۲\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^{۲} = \left|-\vec{a}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ + \left|\vec{b}\right|^{۲} + \left|\vec{c}\right|^{۲} + ۲\left(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}\right) = ۱$$

$$\Rightarrow ۱ + ۴ + ۲\left(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}\right) = ۰$$

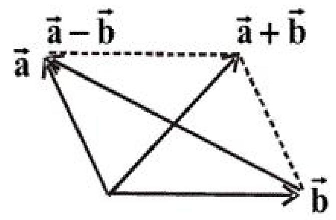
$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c} = -\frac{۵}{۲} = -۲/۵$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

مطابق شکل بردارهای $a + b$ و $a - b$، اقطار این متوازی‌الاضلاع هستند. داریم:



$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (۲+۱, -۱+۲, ۱-۱) = (۳, ۱, ۰) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{۱۰} \\ \vec{a} - \vec{b} = (۲-۱, -۱-۲, ۱+۱) = (۱, -۳, ۲) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۱۴} \end{cases}$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right| = \left|2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+4\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+2\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}\right|$$

$$= \left|4\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}\right| = 3\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 3\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin 120^\circ$$

$$= 3\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

شرط آن‌که چهار نقطه A، B، C و D روی یک صفحه باشند آن است که سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌صفحه باشند، به عبارتی $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = 0$ باشد.

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = 0 \Rightarrow (-2,2,-2)\cdot((2,1,-1)\times(-1,1,m-2)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m-2 \end{vmatrix} = -6m+6 = 0 \Rightarrow m = 1$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

سه بردار غیرصفر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند، اگر و فقط اگر ضرب مختلط این سه بردار برابر صفر باشد، یعنی:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = c\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

داریم :
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 داریم :

$$\Rightarrow (m+3-2m+2)-(-m+m-1+6) = 0 \Rightarrow m = 0$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم بردار $\vec{a}\times\vec{c}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است، بنابراین داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow \vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|^{۲}+\vec{a}.\vec{b}=۰\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|^{۲}$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=-|\vec{a}|^{۲}\Rightarrow \cos\theta=\frac{-|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \theta=۱۲۰^{\circ}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲}+\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}$$
$$\Rightarrow \left(۵\sqrt{۵}\right)^{۲}+(-۱)^{۲}=۳^{۲}\times|\vec{b}|^{۲}$$
$$\Rightarrow ۹|\vec{b}|^{۲}=۱۲۶\Rightarrow |\vec{b}|^{۲}=۱۴\xrightarrow{|\vec{b}|>۰}|\vec{b}|=\sqrt{۱۴}$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

شرط هم صفحه بودن سه بردار

$\vec{a}$

$\vec{b}$، $\vec{c}$ و آن است که حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی این سه بردار برابر صفر گردد، یعنی

$$\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=۰$$

است. بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix}-۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ -۴ & m & ۵\end{vmatrix}=۰$$

$$\xrightarrow{}(۰-۸+۶m)-(۰-m+۲۰)=۰$$

$$\Rightarrow ۷m-۲۸=۰\Rightarrow ۷m=۲۸\Rightarrow m=۴$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

کافی است بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را بسازیم. زاویه بین این دو بردار همان زاویه رأس A است.

$\overrightarrow{AB} = (۳,۲,۶)$

$\overrightarrow{AC} = (۵,۸,۳)$

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{۱۵+۱۶+۱۸}{\sqrt{۹+۴+۳۶}\times\sqrt{۲۵+۶۴+۹}}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۴۹}{۷\times۷\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داده شده داریم:

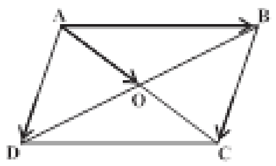
$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \left|\overrightarrow{BC}\right|^۲$$

$$= \left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos ۴۵^\circ - \left|\overrightarrow{BC}\right|^۲ = ۱۷\times ۵\sqrt{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}} - ۱۷^۲ = -۲۰۴$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به این که $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ است، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{AOD}} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{۱}{۲}|(۲,-۱,۱)\times(-۱,۱,-۱)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|(۰,۱,۱)| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right| = ۲\sqrt{۲}$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (۴ - m, mn - ۲, ۱ - ۲n)$$

تصویر بردار $\vec{c}$ روی محور xها برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$۴ - m = ۱ \Rightarrow m = ۳$$

طول تصویر بردار $\vec{c}$ روی صفحه xz برابر ۲ است در نتیجه داریم:

$$۲ = \sqrt{(۴ - m)^۲ + (۱ - ۲n)^۲} \xrightarrow{m=۳} (۱ - ۲n)^۲ = ۳$$

$$\Rightarrow ۱ - ۴n + ۴n^۲ = ۳ \Rightarrow ۴n^۲ - ۴n - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر} n = -\frac{(-۴)}{۴} = ۱$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{u} = (۳\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k}) = ۳\vec{i} \times \vec{j} - ۳\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{j} - \vec{j} \times \vec{k}$$

$$= ۳\vec{k} + ۳\vec{j} + \vec{o} - \vec{i} = (-۱, ۳, ۳)$$

تصویر قائم $\vec{u}$ بر صفحه xy : $\vec{u_۱} = (-۱, ۳, ۰) \Rightarrow |\vec{u_۱}| = \sqrt{۱۰}$

تصویر قائم $\vec{u}$ بر صفحه yz : $\vec{u_۲} = (۰, ۳, ۳) \Rightarrow |\vec{u_۲}| = ۳\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{u_۱}|}{|\vec{u_۲}|} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

اگر بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (x, y, z)$ را در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از نامساوی کشی شوارتز داریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}| . |\vec{b}|$$

$$|۲x - y + ۲z| \le \sqrt{۴ + ۱ + ۴} \times \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$\Rightarrow ۶ \le ۳ \times \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \Rightarrow ۲ \le \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$\Rightarrow ۴ \le x^۲ + y^۲ + z^۲ \Rightarrow \min(x^۲ + y^۲ + z^۲) = ۴$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۴

دو بردار $\vec{u}=(2a,b,c)$ و $\vec{v}=(2,1,1)$ را در نظر بگیرید. طبق نامساوی کشی شوارتز داریم:

$$|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}| \Rightarrow |4a+b+c| \le \sqrt{4a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{4+1+1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (4a+b+c)^2 \le (4a^2+b^2+c^2) \times 6$$

$$\Rightarrow \frac{(4a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2} \le 6$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۲

اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\tan\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}.\vec{b}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

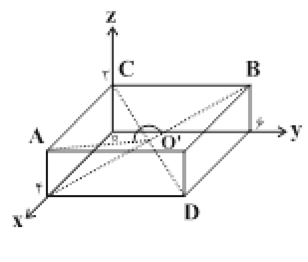
اگر بردار $\vec{a'}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$|\vec{a'}| = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta$$

$$\xrightarrow{\theta=60^\circ} |\vec{a'}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۳



نقطه O' وسط دو نقطه $C=(0,0,2)$ و $D=(4,6,0)$ قرار دارد. بنابراین مختصات نقطه O' به‌صورت $O'=(2,3,1)$ است. با توجه به نقاط $A=(4,0,2)$ و $B=(0,6,2)$ داریم:

$$\overrightarrow{O'A} = (2,-3,1)\ ,\ \overrightarrow{O'B} = (-2,3,1)$$

$$\cos\left(\widehat{AO'B}\right) = \frac{\overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{O'B}}{|\overrightarrow{O'A}||\overrightarrow{O'B}|} = \frac{-4-9+1}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = \frac{-12}{14} = \frac{-6}{7}$$