TURBOTEST

توربوتست

هندسه یازدهم | استاد مجید خاکی

Pythagoras

توربوتست | بانک تست انحصاری دوره توربوجت

کاری از گروه آموزشی راینو

راینو
جادوگر آموزش ایران!

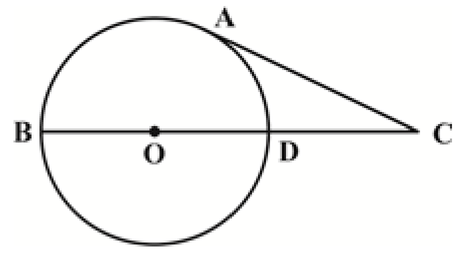
توربوجت

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه یازدهم فصل ۱ آموزشی**

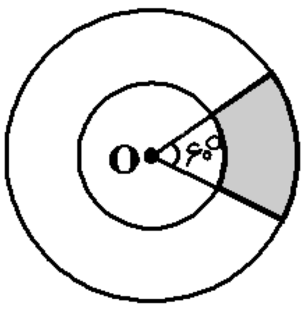
آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

① در دایره $C(O,2)$، اگر A نقطه تماس و $AB = AC$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟



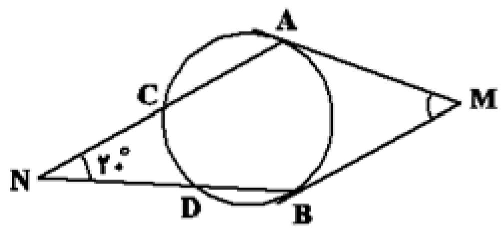
۱) ۲
۲) ۳
۳) $\sqrt{5}$
۴) $\sqrt{7}$

② در شکل زیر، دو دایره با شعاع‌های ۱ و ۲ هم مرکز هستند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



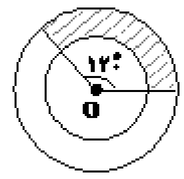
۱) π
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{\pi}{4}$

③ در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس‌اند و $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = 70^\circ$ است. اندازه زاویه M کدام است؟



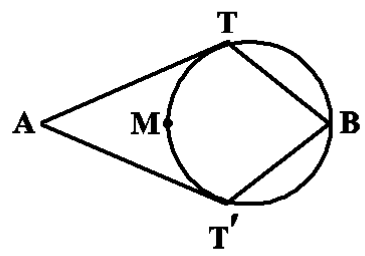
۱) ۵۵°
۲) ۴۵°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

۴) مطابق شکل زیر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O, 2r)$ مفروض‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر 25π باشد، آن‌گاه مساحت دایره بزرگ‌تر کدام است؟



۱) 75π
۲) 125π
۳) 100π
۴) 150π

۵) در شکل زیر، دو مماس AT و AT′ از نقطه A بر دایره رسم شده‌اند. اگر $T\hat{B}T' = 4\hat{A}$ باشد، اندازه کمان $\widehat{TBT'}$ کدام است؟



۱) ۲۰۰°
۲) ۲۱۰°
۳) ۲۲۰°
۴) ۲۴۰°

۶) از نقطه M به فاصله ۱۰ از مرکز دایره $C(O, 6)$، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم می‌کنیم. اندازه AB کدام است؟

۱) ۴/۸
۲) ۵/۲
۳) ۹/۶
۴) ۱۰/۴

۷) اگر دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 2)$ متقاطع و $OO' = 3x - 2$ باشد، آن‌گاه کدام یک از مقادیر زیر برای x قابل قبول است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{7}{2}$
۴) $\frac{9}{2}$

۸) اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره، واسطه هندسی بین اندازه قطرهای آنها است. فاصله بین دورترین نقاط دو دایره برابر کدام است؟

۱) واسطه حسابی بین قطرهای دو دایره
۲) واسطه حسابی بین شعاع‌های دو دایره
۳) مجموع قطرهای دو دایره
۴) مجموع شعاع‌های دو دایره

۹) امتداد مماس‌های مشترک دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۳ و ۴ در نقطه M با هم برخورد می‌کنند. اگر فاصله M تا مرکز دایره کوچک‌تر برابر ۵ باشد، طول مماس مشترک دو دایره، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{5}{2}$

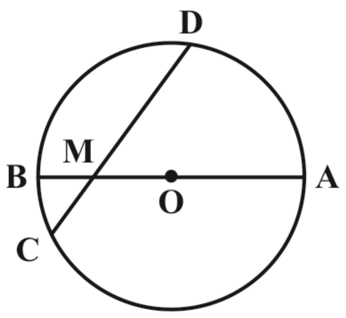
۱۰) کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به‌ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴/۸
۲) ۵
۳) ۹/۶
۴) ۱۰

۱۱) دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مفروض‌اند. اگر بیشترین و کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره به‌ترتیب ۱۸ و ۸ باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۵

۱۲) در شکل زیر، اگر MO = ۶ ،MC = ۴ و MD = ۹ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$
۲) $۶\sqrt{۳}$
۳) ۸
۴) ۹

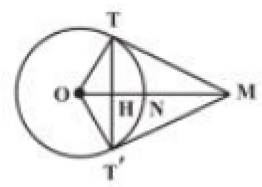
۱۳) نقاط A و B، به‌ترتیب روی دو دایره برون هم C (O,۴) و C′(O′,۹) در حرکت‌اند. اگر کوتاه‌ترین طول پاره‌خط AB برابر یک واحد باشد، اندازه مماس مشترک بیرونی این دایره‌ها کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲۱}$
۲) $۳\sqrt{۳۳}$
۳) $۳\sqrt{۱۹}$
۴) $۵\sqrt{۲۱}$

۱۴) در یک دایره دو وتر عمود بر هم AB وCD یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند، به طوری که۱ = PA و ۳ = PC = PD است. طول خط مماس بر دایره از نقطه‌ای به فاصله۱۳ از مرکز آن دایره کدام است؟

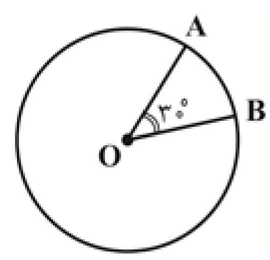
۱) ۵
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۵) در شکل زیر از نقطهM، دو مماسMT وMT′ بر دایره رسم شده است. اگر۶ = MO وH وسطON باشد، شعاع دایره کدام است؟



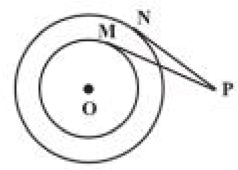
۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۶) در شکل زیر، اگر O مرکز دایره و طول کمان AB برابر π باشد، مساحت قطاع OAB کدام است؟



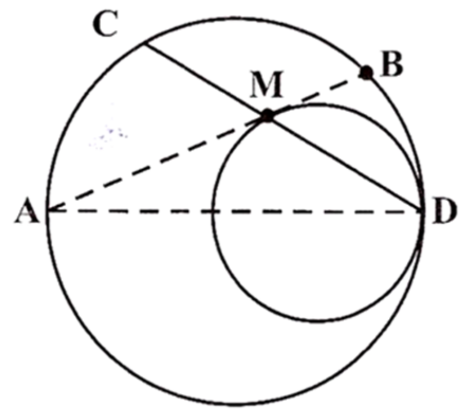
۱) ۳π
۲) ۶π
۳) ۱۲π
۴) ۲۴π

۱۷) در شکل زیر دو دایره با شعاع‌های $R = ۳$ و $R' = ۴$، دارای مرکز مشترک O هستند. از نقطهٔ P دو مماس PM و PN بر این دو دایره رسم شده است. اگر $PM = ۳\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ PN کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) ۴
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۱۸) در شکل زیر دو دایره در نقطه D مماس داخلی و شعاع یکی با قطر دیگری، برابراست. وتر AB از دایره بزرگ‌تر بر دایره داخل، در نقطه M، مماس است نسبت $\frac{MC}{MB}$ ، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

۱۹) شعاع دایره محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، چند برابر شعاع دایره محیطی آن است؟

۱) ۱/۵ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

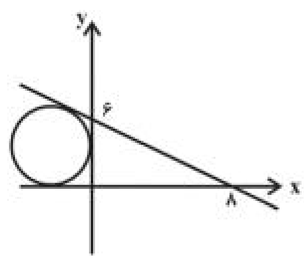
۲۰) مساحت دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۴۸π است. محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۴۴

۲۱) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده، چند برابر مساحت این دایره است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴\pi}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۸\pi}$

۲۲) در شکل مقابل شعاع دایره کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۳
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۲۳) در مثلثی با اضلاع ۷، ۲۴ و ۲۵، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۷
۲) ۱۴
۳) ۲۱
۴) ۲۸

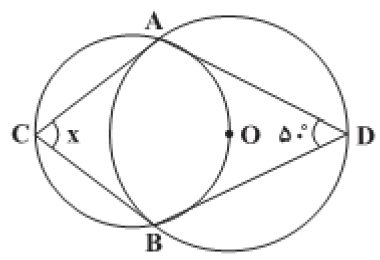
۲۴) در مثلث ABC، $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۸\sqrt{۶}}{۳}$ است. اندازه شعاع دایره محیطی مثلث چقدر است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۲۵) در مثلثی به طول اضلاع۸،۴ و ۱۰ واحد، دایره محاطی خارجی نظیر ضلع متوسط، این ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت دو قطعه حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۶) در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O ، دایره دیگر را در نقاط A و B قطع کرده است. زاویه x چند درجه است؟



۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۰

۲۷) در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟

۱) محاطی و محیطی
۲) فقط محاطی
۳) فقط محیطی
۴) نه محاطی و نه محیطی

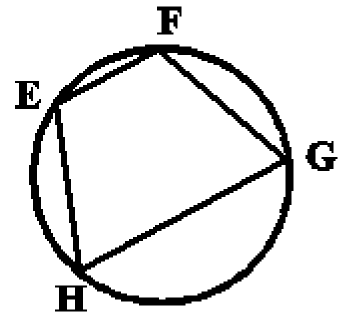
۲۸) دایره‌ای به شعاع ۴ درون شش ضلعی منتظم ABCDEF محاط است. از نقطهٔ T درون شش‌ضلعی که در فاصلهٔ ۱ واحد از ضلع AB قرار دارد، عمودهایی را به ترتیب بر اضلاع BC، ED و AF از شش ضلعی منتظم رسم می‌کنیم. مجموع طول این سه عمود کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$
۲) ۱۲
۳) $۱۲\sqrt{۳}$
۴) ۱۸

۲۹) یک ذوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۹
۲) $۳ + ۴\sqrt{۲}$
۳) ۸
۴) ۷/۵

(۳۰) چهارضلعی EFGH درون دایره‌ای به قطر ۵ مطابق شکل زیر محاط شده است. اگر امتداد اضلاع EH و FG در نقطه N متقاطع باشند و داشته باشیم $\frac{FE}{GH} = \frac{۱}{۲}$، مساحت چهارضلعی EFGH چند درصد مساحت مثلث NGH است؟



۱) ۶۰
۲) ۴۰
۳) ۷۵
۴) ۲۵

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

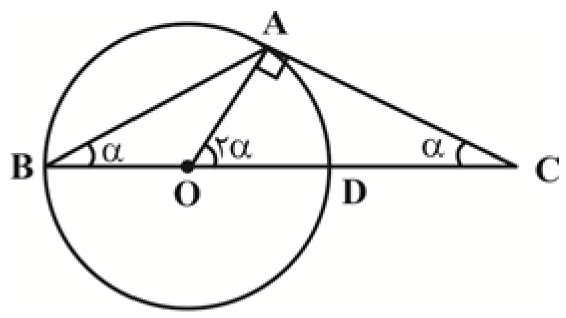
نام آزمون: **هندسه یازدهم فصل ۱ آموزشی**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

Oاز بهA وصل می‌کنیم، شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پسOA برAC عمود است. از طرفی $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{BAC}$ متساوی‌الساقین هستند و زاویهٔAOD، زاویهٔ خارجی مثلث OAB است، پس در مثلثOAC داریم:



$$\alpha + ۲\alpha + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، پس:

$$OA = \frac{OC}{۲} = ۲ \Rightarrow OC = ۴ \Rightarrow CD = OC - OD = ۴ - ۲ = ۲$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

مساحت قطاعی از یک دایره به شعاع R و زاویهٔ α برابر $S = \frac{\pi r^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ}$ است، بنابراین داریم:

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = \frac{\pi \times ۲^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} - \frac{\pi \times ۱^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi}{۶}(۴ - ۱)$$

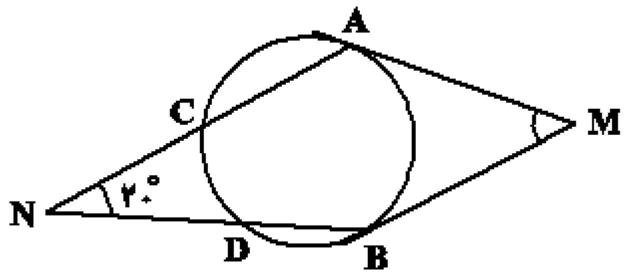
$$= \frac{۳\pi}{۶} = \frac{\pi}{۲}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

فرض کنید $\overset{\frown}{AB} = x$ و $\overset{\frown}{CD} = y$ باشد. داریم:



$$x + y = ۳۶۰° - ۲ \times ۷۰° = ۲۲۰°$$

$$\frac{x-y}{۲} = ۲۰° \Rightarrow x - y = ۴۰°$$

$$\begin{cases} x + y = ۲۲۰° \\ x - y = ۴۰° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۳۰° \\ y = ۹۰° \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۲۳۰° - ۱۳۰°}{۲} = ۵۰°$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و با زاویه مرکزی α از رابطه $S = \frac{\pi r^۲ \alpha}{۳۶۰}$ به دست می‌آید. اگر مساحت قطاع ۱۲۰° در دایره‌های بزرگ و کوچک را به ترتیب با $S_۱$ و $S_۲$ نمایش دهیم، داریم:

$$S_{\text{هاشورزده}} = S_۱ - S_۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = \frac{\pi(۲r)^۲(۱۲۰°)}{۳۶۰°} - \frac{\pi r^۲(۱۲۰°)}{۳۶۰°} = \pi r^۲ \quad x$$

$$\Rightarrow \pi r^۲ = ۲۵\pi \Rightarrow r = ۵$$

$$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi(۲r)^۲ = ۴r^۲\pi = ۱۰۰\pi$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

اگر $\overset{\frown}{TBT'} = \alpha$ فرض شود، آن‌گاه داریم:

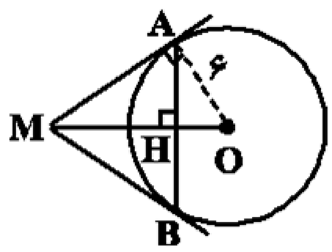
$$T\hat{B}T' = ۴\hat{A} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{TMT'}}{۲} = ۴ \times \frac{\overset{\frown}{TBT'} - \overset{\frown}{TMT'}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{TMT'} = ۴\overset{\frown}{TBT'} - ۴\overset{\frown}{TMT'} \Rightarrow ۵\overset{\frown}{TMT'} = ۴\overset{\frown}{TBT'}$$

$$\Rightarrow ۵(۳۶۰° - \alpha) = ۴\alpha \Rightarrow ۱۸۰۰° - ۵\alpha = ۴\alpha \Rightarrow ۹\alpha = ۱۸۰۰° \Rightarrow \alpha = ۲۰۰°$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳



می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر یکدیگرند، پس $MA = MB$ است. از طرفی $OA = OB$ است، بنابراین OM عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد، یعنی $AH = HB$ و $OM \perp AB$. مطابق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

$$\overset{\Delta}{OAM} \ : AM^{۲} = OM^{۲} - AO^{۲} = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AM = ۸$$

$$AH \times OM = AO \times AM \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۶ \times ۸ \Rightarrow AH = ۴/۸$$

$$\Rightarrow AB = ۲ \times ۴/۸ = ۹/۶$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

برای دو دایره متقاطع C و C' داریم:

$$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow ۵ - ۲ < ۳x - ۲ < ۵ + ۲$$

$$۳ < ۳x - ۲ < ۷ \Rightarrow ۵ < ۳x < ۹ \Rightarrow \frac{۵}{۳} < x < ۳ \qquad (۱)$$

$$OO' > ۰ \Rightarrow ۳x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۲}{۳} \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \frac{۵}{۳} < x < ۳$$

در بین گزینه‌ها تنها $x = \frac{۵}{۲}$ در این بازه قرار دارد.

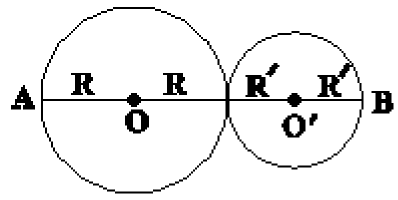
سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

اگر شعاع‌های دو دایره به ترتیب برابر R و R' و طول خط‌المرکزین دو دایره برابر d باشد، آنگاه داریم:

طول مماس مشترک خارجی : $TT' = \sqrt{2R \times 2R'}$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'} \Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = 4RR'$$
$$\Rightarrow d^2 = (R - R')^2 + 4RR' = (R + R')^2 \Rightarrow d = R + R'$$



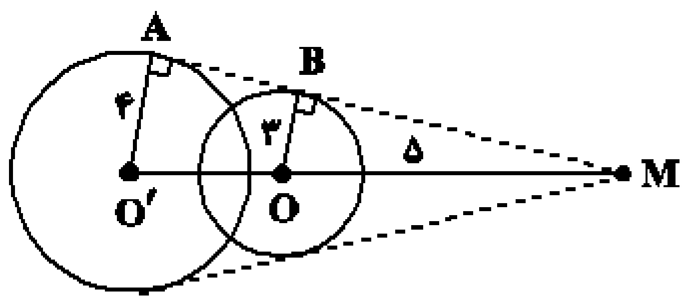
بنابراین دو دایره مماس خارج هستند و فاصله دورترین نقاط دو دایره مطابق شکل برابر مجموع قطرهای آنها است، یعنی داریم:

$AB = 2R + 2R'$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



$\overset{\triangle}{OBM} : BM^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow BM = 4$

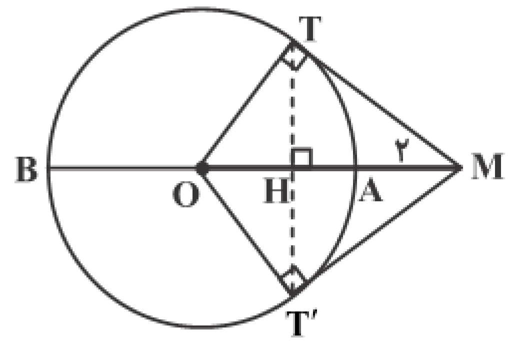
$O'A \parallel OB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OB}{O'A} = \frac{MB}{MA}$

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4}{MA} \Rightarrow MA = \frac{16}{3} \Rightarrow AB = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»



$MT^{۲} = MA \times MB = ۲ \times ۱۸ = ۳۶ \Rightarrow MT = ۶$

$r = OT = OA = ۸$ (شعاع دایره) $\Leftarrow$ $۱۶ = ۲ - ۱۸$ =قطردایره

در مثلث قائم‌الزاویه $O\overset{\Delta}{T}M$:

$OM = OA + AM = ۱۰$

$TH \times OM = OT \times MT \Rightarrow TH = \frac{OT \times MT}{OM}$

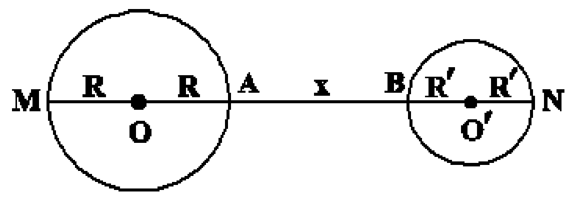
$\Rightarrow TH = \frac{۸ \times ۶}{۱۰} = ۴/۸$

$\Rightarrow TT' = ۲TH = ۲ \times ۴/۸ = ۹/۶$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل زیر، اگر کمترین فاصله نقاط دو دایره برابر $AB = x$ باشد، آن‌گاه داریم:



$MN = R + R + x + R' + R'$ =بیشترین فاصله دو دایره

$= ۲R + ۲R' + x = ۱۸ \xrightarrow{x=۸} ۲R + ۲R' + ۸ = ۱۸ \Rightarrow R + R' = ۵$

$d = OO' = R + R' + x = ۵ + ۸ = ۱۳$

$\sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$ =طول مماس مشترک داخلی دو دایره

$= \sqrt{۱۳^{۲} - ۵^{۲}} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

اگر شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD$$
$$\Rightarrow (R + MO)(R - MO) = MC \times MD$$
$$\Rightarrow (R + ۶)(R - ۶) = ۴ \times ۹ \Rightarrow R^{۲} - ۳۶ = ۳۶$$
$$\Rightarrow R^{۲} = ۷۲ \Rightarrow R = ۶\sqrt{۲}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

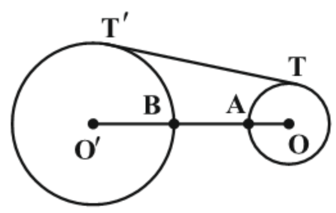
گزینه «۳»

کوتاه‌ترین طول پاره‌خط AB هنگامی پدید می‌آید که روی خط المرکزین قرار گیرند، که در این حالت اندازه خط‌المرکزین آن‌ها برابر می‌شود با:

$$d = OA + AB + BO' = ۹ + ۱ + ۴ = ۱۴$$

حال بنابر فرمول مماس مشترک خارجی خواهیم داشت:

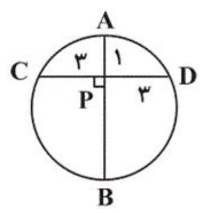
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R' - R)^{۲}}$$
$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۱۴^{۲} - (۹ - ۴)^{۲}}$$
$$= \sqrt{۹ \times ۱۹} = ۳\sqrt{۱۹}$$



سوال ۱۴

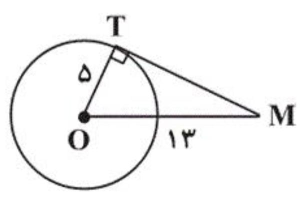
پاسخ: گزینه ۴

اگر وتری از یک دایره، وتر دیگری را نصف کرده و بر آن عمود باشد، آن‌گاه آن وتر قطر دایره است. پس در این مساله AB قطر دایره است. حال با توجه به روابط طولی در دایره داریم:



$$PA \times PB = PC \times PD$$
$$\Rightarrow ۱ \times PB = ۳ \times ۳ \Rightarrow PB = ۹$$
$$\Rightarrow AB = ۱۰ \Rightarrow r = \frac{AB}{۲} = ۵$$

حال با توجه به شکل مقابل طول مماس به دست می‌آید:



$$MO^{۲} = MT^{۲} + OT^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱۳^{۲} = MT^{۲} + ۵^{۲} \Rightarrow MT = ۱۲$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم طول مماس های رسم شده از یک نقطهٔ خارج دایره با هم برابرند. بنابراین $MT = MT'$، از طرفی $OT = OT'$ است، پس نقاط M و O روی عمودمنصف پاره‌خط TT' واقع‌اند؛ یعنی OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است و در نتیجه بر آن عمود است. بنابراین TH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM است و داریم:

$$OT^{۲} = OH \times OM \Rightarrow R^{۲} = \frac{R}{۲} \times ۶ \Rightarrow R = ۳$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

طول کمان AB در دایره‌ای به شعاع R و با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی α برابر است با: $L = \frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha \Rightarrow \pi = \frac{\pi R}{۱۸۰^\circ} \times ۳۰^\circ \Rightarrow R = ۶$

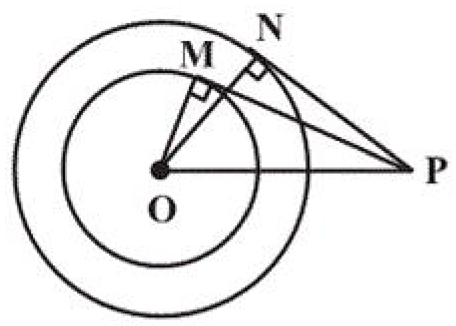
مساحت قطاع OAB برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi \times ۶^{۲} \times ۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = ۳\pi$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است، بنابراین داریم:



$\overset{\Delta}{OMP}$: $OP^{۲} = OM^{۲} + PM^{۲} = ۹ + ۲۷ = ۳۶$

$\overset{\Delta}{ONP}$: $PN^{۲} = OP^{۲} - ON^{۲} = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰$

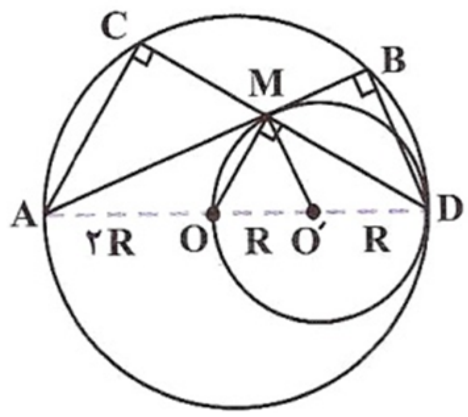
$\Rightarrow PN = ۲\sqrt{۵}$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر شعاع دایره کوچکتر را R فرض کنیم، شعاع دایره بزرگتر ۲R خواهد بود. پس طبق شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACD} = ۹۰^\circ \\ \widehat{OMD} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow OM \parallel AC$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{MD}{MC} = \frac{OD}{OA} = \frac{۲R}{۲R} = ۱ \Rightarrow MD = MC \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}OM' \perp AB \Rightarrow \widehat{AMO'} = ۹۰^\circ \\ (AD \quad)\widehat{ABD} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow MO' \parallel BD$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{MA}{MB} = \frac{AO'}{O'D} = \frac{۳R}{R} = ۳ \Rightarrow MA = ۳MB \ (۲)$$

طبق روابط طولی در دایره بزرگتر داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow{(۱),(۲)} ۳MB \times MB = MC \times MC \Rightarrow \frac{MC^۲}{MB^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \sqrt{۳}$$

سوال ۱۹

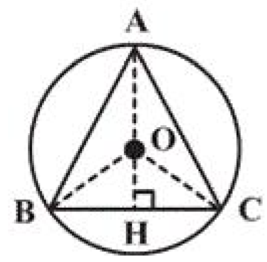
پاسخ: گزینه ۱

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابرa باشد، آن‌گاه شعاع دایره محاطی خارجی آن برابر است با:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۱}{۲}a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

از طرفی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، عمودمنصف‌های اضلاع همان میانه‌های مثلث هستند، پس مرکز دایره محیطی مثلث، همان نقطه همرسی میانه‌هاست و در نتیجه داریم:

$R = AO = \frac{۲}{۳}AH = \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ (شعاع دایره محیطی)



$$\frac{r_a}{R} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

اگر S مساحت مثلث وP نصف محیط مثلث باشد، شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر $r = \frac{S}{P}$ است. اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a در نظر بگیریم، داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

مساحت دایره محاطی داخلی برابر ۴۸π است. داریم:

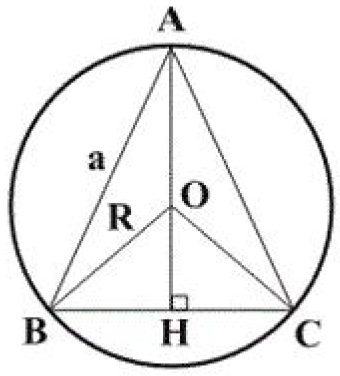
$$\pi r^۲ = ۴۸\pi \Rightarrow r^۲ = ۴۸ \Rightarrow r = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۴\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a \Rightarrow a = ۲۴$$

بنابراین محیط مثلث برابر $۷۲ = ۲۴ \times ۳$ می باشد.

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل همرسی عمود منصف‌های اضلاع آن مثلث است. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع و عمودمنصف نظیر یک ضلع برهم‌منطبق‌اند.



با توجه به اینکه میانه‌ها در هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:

$$OA = \frac{۲}{۳}AH \Rightarrow R = \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow a = \sqrt{۳}R$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴\pi}$$

سوال ۲۲

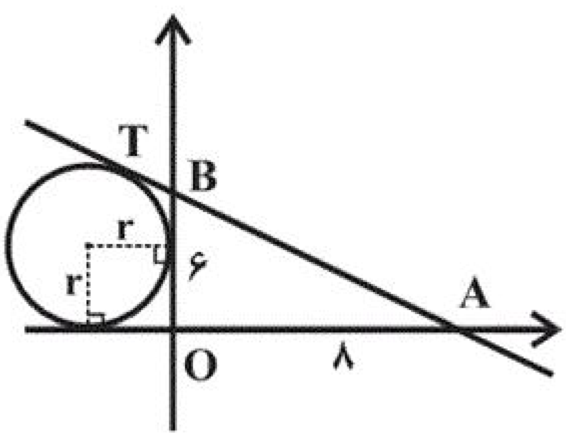
پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل، دایرهٔ مورد نظر دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع OB در مثلث OAB است. داریم:

$$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow AB = ۱۰$$

$$P = \frac{۶+۸+۱۰}{۲} = ۱۲ \ .$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۲۴$$



شعاع دایرهٔ محاطی خارجی : $r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۲۴}{۱۲-۶} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$a = ۷ \ , \ b = ۲۴ \ , \ c = ۲۵$

$P = \frac{a+b+c}{۲} = ۲۸$

با توجه به اینکه $۲۵^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲$، مثلث قائم‌الزاویه است و طول اضلاع قائمهٔ آن ۲۴ و ۷ است، داریم:

$S = \frac{۷ \times ۲۴}{۲} = ۸۴$

$\Rightarrow r_b = \frac{S}{P-a} = \frac{۸۴}{۲۸-۲۴} = \frac{۸۴}{۴} = ۲۱$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

به کمک قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت:

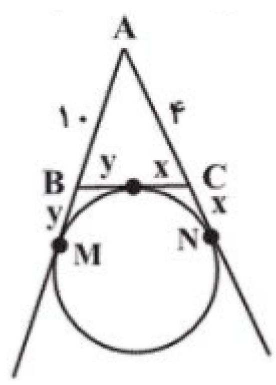
$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۸}{\sin ۱۲۰^\circ} = ۲R$

$\Rightarrow ۲R = \frac{۸}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow R = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

اگر طول قطعات ایجاد شده روی ضلع متوسط را با x و y نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:



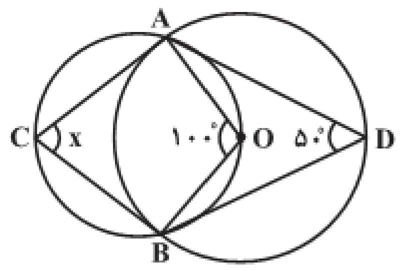
$$\begin{cases} BC = ۸ \Rightarrow x + y = ۸ \\ AN = AM \Rightarrow ۴ + x = ۱۰ + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۸ \\ x - y = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۷, y = ۱ \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{۱}{۷}$$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

از O به A و B وصل می‌کنیم. داریم:



زاویهٔ محاطی $\hat{D} = \frac{\widehat{AMB}}{۲} \Rightarrow \widehat{AMB} = ۱۰۰^{\circ}$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = \widehat{AMB} \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۰۰^{\circ}$

چهارضلعی AOBC محاطی است، پس در آن زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند، بنابراین:

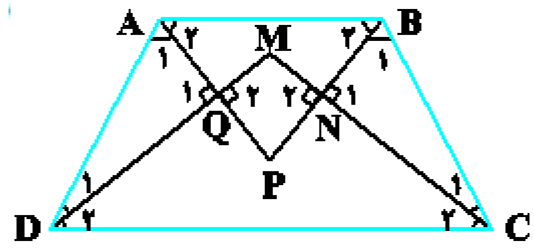
$x + ۱۰۰^{\circ} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow x = ۸۰^{\circ}$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه۱

فرض کنید چهارضلعی MNPQ از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD پدید آمده باشد. در این‌صورت داریم:



$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{D}_1=90^\circ$$

$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{AQD}} \hat{Q}_1=90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{Q}_2=90^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ$$

$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{BNC}} \hat{N}_1=90^\circ \Rightarrow \hat{N}_2=90^\circ$$

بنابراین $\hat{N}_2+\hat{Q}_2=180^\circ$ و در نتیجه $\hat{M}+\hat{P}=180^\circ$ است و چهارضلعی MNPQ محاطی می‌باشد. از طرفی داریم:

$$\hat{A}=\hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}=\frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}_2 \xrightarrow{\overset{\triangle}{APB}} AP=BP \quad (1)$$

$$\hat{C}=\hat{D} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{D}}{2} \Rightarrow \hat{C}_2=\hat{D}_2 \xrightarrow{\overset{\triangle}{CMD}} CM=DM \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_1=\widehat{B}_1 \\ AD=BC \\ \widehat{D}_1=\widehat{C}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{AQD} \cong \overset{\triangle}{BNC} \Rightarrow \begin{cases} AQ=BN & (3) \\ DQ=CN & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1),(3) \Rightarrow AP-AQ=BP-BN \Rightarrow PQ=PN \\ (2),(4) \Rightarrow CM-CN=DM-DQ \Rightarrow MN=MQ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow PQ+MN=PN+MQ$$

بنابراین چهارضلعی MNPQ محیطی نیز است..

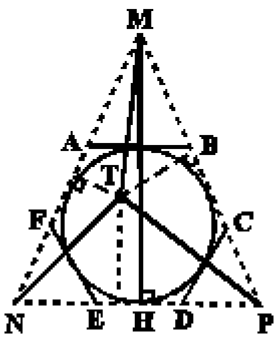
سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

طبق تمرین صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی، اندازهٔ ضلع یک n ضلعی منتظم که بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده است از رابطهٔ $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow AB = ۲ \times ۴\tan ۳۰^\circ = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$



مثلث MNP مطابق شکل متساوی‌الاضلاع است، پس عمودهای رسم شده از نقطهٔ T بر اضلاع شش ضلعی منتظم، در واقع عمودهایی است که بر اضلاع مثلث MNP رسم شده و مجموع طول آن‌ها برابر طول ارتفاع مثلث است.

حال تنها باید اندازهٔ ارتفاع MH را به دست آوریم:

$$MH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}NP = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۳AB$$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} = ۱۲$$

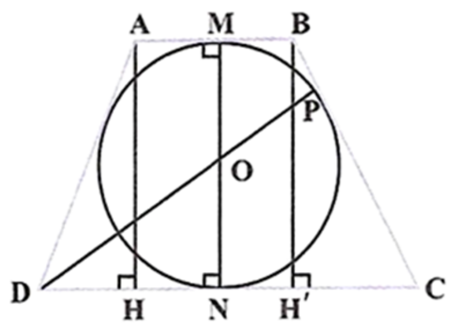
سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + DC = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} \frac{۹}{۲} + ۸ = ۲AD \Rightarrow AD = \frac{۲۵}{۴}$$



$$DH = CH' = \frac{۸ - \frac{۹}{۲}}{۲} = \frac{۷}{۴}$$

$$\overset{\triangle}{AHD} \ : AH^{۲} = AD^{۲} - DH^{۲} = \left(\frac{۲۵}{۴}\right)^{۲} - \left(\frac{۷}{۴}\right)^{۲} = \frac{۵۷۶}{۱۶} = ۳۶$$

$$\Rightarrow AH = ۶ \Rightarrow ۲R = ۶ \Rightarrow R = ۳$$

$$\overset{\triangle}{DON} \ : OD^{۲} = ON^{۲} + DN^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} = ۲۵ \Rightarrow OD = ۵$$

مطابق شکل نقطه P دورترین نقطه دایره نسبت به رأس D (یک رأس روی قاعده بزرگ ذوزنقه) است. داریم:

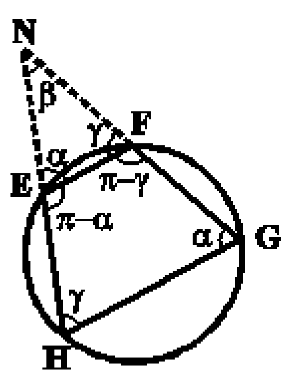
$$DP = OD + OP = ۵ + ۳ = ۸$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۳

امتداد اضلاع EH و FG را رسم می‌کنیم تا در نقطه N همدیگر را قطع کنند. چهار ضلعی $EFGH$ محاطی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{E} + \hat{G} = \hat{F} + \hat{H} = ۱۸۰^{\circ}$$



به‌راحتی می‌توان فهمید دو مثلث NEF و NGH به‌حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

$$\overset{\triangle}{NEF} \sim \overset{\triangle}{NGH} \Rightarrow \frac{S_{NEF}}{S_{NGH}} = \left(\frac{EF}{GH}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{NGH}} = \frac{S_{NGH} - S_{NEG}}{S_{NGH}} = ۱ - \left(\frac{S_{NEG}}{S_{NGH}}\right) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه۲ فصل ۱ زماندار**

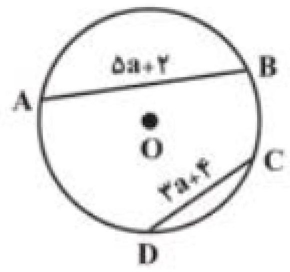
(۱) خط d دایرهٔ $C(O,2)$ را در نقاط A و B قطع کرده است. خط d' در نقطهٔ B بر دایرهٔ C مماس است و با خط d زاویهٔ $60°$ می‌سازد. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **۲)** $\sqrt{3}$
۳) $2\sqrt{3}$ **۴)** $4\sqrt{3}$

(۲) نقطه M روی دایره $C(O\ ,\ 18)$ واقع است. طول وتری از دایره C که موازی با OM و مماس بر دایره‌ای به قطر OM باشد، کدام است؟

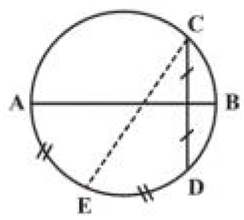
۱) ۹ **۲)** $9\sqrt{3}$
۳) ۱۸ **۴)** $18\sqrt{3}$

(۳) دایره $C(O\ ,\ 8)$ مطابق شکل زیر مفروض است. اگر وتر AB نسبت به وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، در این صورت مقادیر ممکن برای a شامل چند عدد طبیعی می‌شود؟



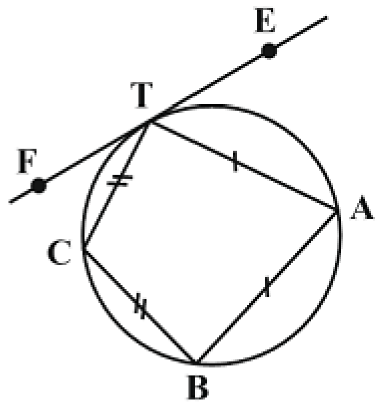
۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

(۴) در دایره شکل زیر، قطرAB از وسط وترCD می‌گذرد. اگر کمان‌های $\overset{\frown}{AE}$ و $\overset{\frown}{ED}$ برابر باشند، آن‌گاه نقطه برخورد پاره‌خط‌هایAB وCE همواره کدام‌یک از نقاط زیر است؟



۱) نقطه همرسی میانه‌های مثلثACD
۲) نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلثACD
۳) نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلثACD
۴) نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثACD

⑤ در شکل مقابل، T نقطه تماس و $E\hat{T}A = ۲F\hat{T}C$ است اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ کدام است؟

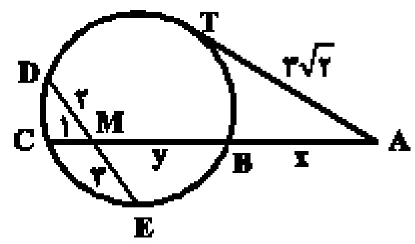


۱) °۶۰
۲) °۶۵
۳) °۷۰
۴) °۷۵

⑥ از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین نقطه دایره $۴(\sqrt{۲} - ۱)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر ABکدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ **۲)** ۲ **۳)** $۲\sqrt{۲}$ **۴)** ۳

⑦ در شکل زیر، اگر AT مماس بر دایره باشد، مقدار x کدام است؟

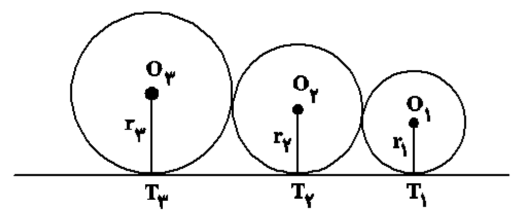


۱) ۲ **۲)** ۲/۵
۳) ۳ **۴)** ۴

⑧ ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸و۱۲و اندازهٔ یک ساق برابر ۵واحد، مفروض است. اگر این ذوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعهٔ مماسی که از نقطهٔ تلاقی دو ساق بر دایرهٔ محیطی آن رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ **۲)** $۵\sqrt{۶}$
۳) $۶\sqrt{۵}$ **۴)** $۸\sqrt{۳}$

⑨ سه دایره مطابق شکل زیر بر هم مماس می‌باشند و مراکز آن‌ها بر روی یک خط راست قرار دارند. اگر $۲r_۱ = r_۲$ و $T_۱T_۲ = ۲\sqrt{۲}$ باشد، در این صورت اندازه $r_۳$ کدام است؟

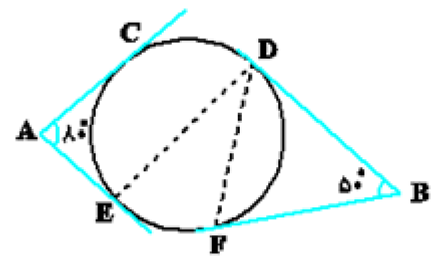


۱) ۳ **۲)** $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴ **۴)** $۳\sqrt{۲}$

۱۰) اگر بین شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین آن‌ها (d) روابط $r_1 + r_2 = \frac{3d}{4}$ و $r_1 - r_2 = \frac{d}{4}$ برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که به هر دو دایره مماس است کدام است؟

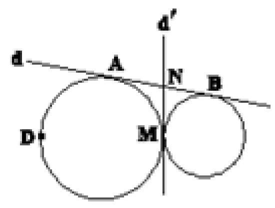
۱) $\frac{d}{4}$
۲) $\frac{d}{16}$
۳) $\frac{d}{2}$
۴) $\frac{d}{8}$

۱۱) در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه $E\hat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۱۲) در شکل زیر، دو دایره در نقطه M بر هم مماس‌اند و خطوط d و d′ به ترتیب مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره هستند. اگر $\overset{\frown}{ADM} = ۲۹۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABM کدام است؟

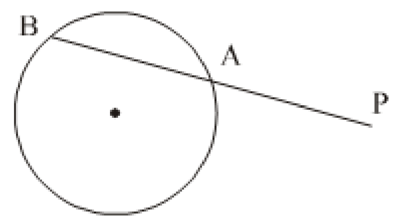


۱) ۲۰°
۲) ۳۵°
۳) ۵۵°
۴) ۷۰°

۱۳) دو دایره C (O, R) و C′ (O′, R′) مفروض‌اند. اگر بیشترین و کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره به‌ترتیب ۱۸ و ۸ باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

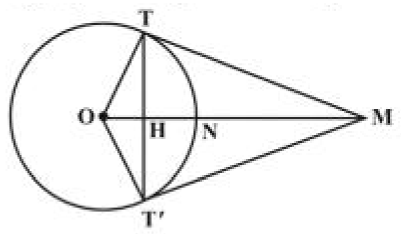
۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۵

۱۴) نزدیک ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که PA-AB=۲، اندازهٔ AB کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

⑮ در شکل زیر از نقطه M، دو مماس MT و MT′ بر دایره رسم شده است. اگر H وسط ON و $TH = ۲\sqrt{۳}$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

⑯ دو دایره C(O,۱۰) و C′(O′,۴) مماس خارج‌اند. اگر عمودمنصف پاره‌خط TT′ (مماس مشترک خارجی دو دایره)، خط‌المرکزین دو دایره را در نقطه A قطع کند، طول پاره خط AT کدام است؟ (نقطه T روی دایره C واقع است.)

۱) $۴\sqrt{۵}$　۲) $\sqrt{۸۹}$　۳) $\sqrt{۹۸}$　۴) ۱۰

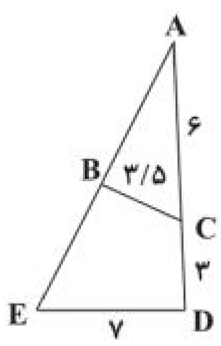
⑰ بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ متخارج C(O, R) و C′(O′, R′) برابر ۱۶ و طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۱۰ است. طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) ۴　۲) ۶
۳) ۸　۴) ۱۰

⑱ دو دایره به شعاع‌های ۴ و x > ۴ مماس برون هستند از مرکز دایره کوچکتر مماسی بر دایره بزرگتر رسم کرده‌ایم. اگر طول این قطعه مماس ۱۰ باشد، شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

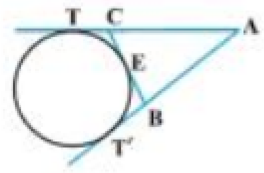
۱) ۷　۲) ۱۰/۵　۳) ۸/۲۵　۴) ۹/۵

⑲ در شکل مقابل، چهارضلعی BCDE هم محاطی و هم محیطی است. اندازه AB کدام است؟



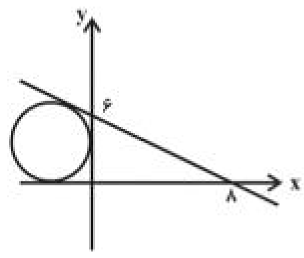
۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

۲۰) از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT ‘ AT بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری که نقطهٔ B همواره روی ‘AT و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$AT
۲) AT
۳) $\frac{۳}{۲}$AT
۴) ۲AT

۲۱) در شکل مقابل شعاع دایره کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۴

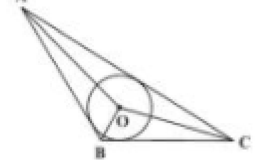
۲۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده، چند برابر مساحت این دایره است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴\pi}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۸\pi}$

۲۳) مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ مفروض است. اندازه مماس مشترک خارجی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایره محاطی این مثلث کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۲۴) در شکل زیر، نقطه O مرکز دایره محاطی مثلث ABC می‌باشد. اگر BO = ۶ و $A\hat{O}C = ۱۵۰^\circ$ باشد، آن‌گاه طول شعاع دایره محاطی داخلی مثلث کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

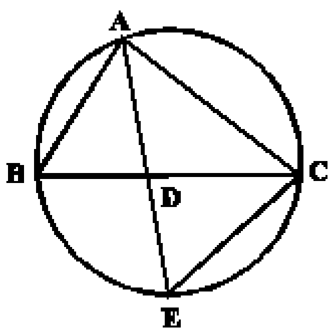
(۲۵) در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و۳ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

(۲۶) در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{۳}$، فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از مرکز هر یک از دایره‌های محاطی خارجی مثلث کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۳}$

(۲۷) در شکل زیر، نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع کند. حاصل $AE \times DE$ برابر کدام است؟



۱) $CD^۲$
۲) $CE^۲$
۳) $AB^۲$
۴) $BC^۲$

(۲۸) در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

(۲۹) دایره محاطی مثلثی با ارتفاع‌های $h_a = ۳$، $h_b = ۵$ و $h_c = ۶$ را رسم کرده و درون آن شش‌ضلعی منتظمی محاط می‌کنیم. مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$ ۲) $\frac{۲۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$ ۳) $\frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$ ۴) $\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۴۹}$

(۳۰) در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه۲ فصل ۱ زماندار**

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

سوال ۱

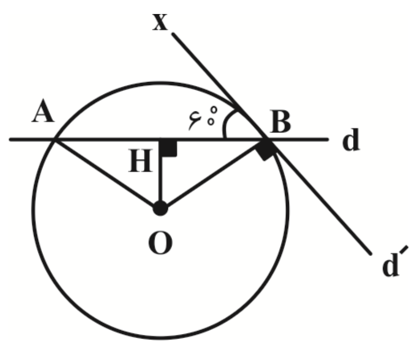
پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

می‌دانیم شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین داریم:

$$O\hat{B}A = O\hat{B}x - A\hat{B}x = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}H = ۶۰^\circ$$

می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه‌رو به زوایای ۳۰° و ۶۰° به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم:



$$OH = \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$$

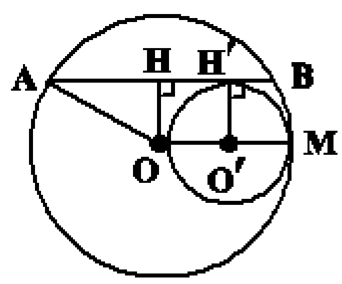
$$BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۲BH = ۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} OH \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

شعاع دایره کوچک‌تر نصف شعاع دایره C یعنی برابر ۹ است، بنابراین $OH = O'H' = ۹$ بوده و در نتیجه داریم:



$$\overset{\Delta}{AHO} : AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۱۸^۲ - ۹^۲ = ۲^۲ \times ۹^۲ - ۹^۲ = ۳ \times ۹^۲$$

$$\Rightarrow AH = ۹\sqrt{۳}$$

قطر عمود بر وتر در یک دایره، وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$AB = ۲AH = ۱۸\sqrt{۳}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم از بین دو وتر دلخواه در دایره، وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، از دیگری بزرگ‌تر است، پس:

$$AB > CD \Rightarrow ۵a + ۲ > ۳a + ۴ \Rightarrow ۲a > ۲ \Rightarrow a > ۱ \qquad (*)$$

از طرفی می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر دایره است. بنابراین:

$$AB < ۲R \Rightarrow ۵a + ۲ < ۱۶ \Rightarrow ۵a < ۱۴ \Rightarrow a < ۲/۸ \qquad (**)$$

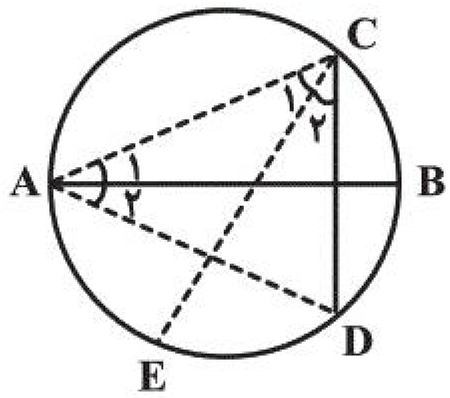
$$\xrightarrow{(**)\ ,\ (*)} ۱ < a < ۲/۸ \xrightarrow{a \in N} a = ۲$$

در نتیجه تنها یک مقدار طبیعی برای a موجود است.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

اگر قطری از یک دایره، وتری از آن دایره را نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند. بنابراین داریم:



$$AB \perp CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$
$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$$

یعنیAB وCE نیمساز زوایای داخلیA وC در مثلثACD هستند و نقطه تلاقی آن‌ها، همان نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی $\overset{\Delta}{ACD}$ است.

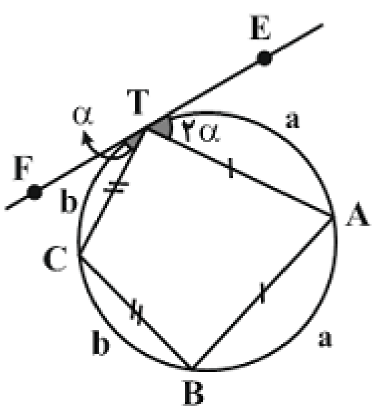
سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

$TA = AB \Rightarrow \overset{\frown}{TA} = \overset{\frown}{AB} = a$
$TC = BC \Rightarrow \overset{\frown}{TC} = \overset{\frown}{BC} = b$
$F\hat{T}C = \alpha \Rightarrow E\hat{T}A = ۲\alpha$
$۲a + ۲b = ۳۶۰^\circ \Rightarrow a + b = ۱۸۰^\circ$

داریم:



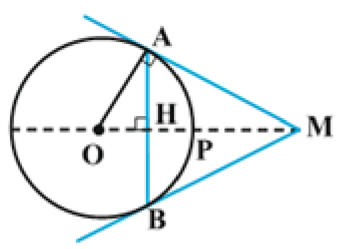
$$\left.\begin{aligned} F\hat{T}C = \frac{\overset{\frown}{TC}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{b}{۲} \\ E\hat{T}A = \frac{\overset{\frown}{TA}}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = \frac{a}{۲} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۳\alpha = \frac{a+b}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳\alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ \xrightarrow{\alpha = \frac{b}{۲}} b = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل زیر، P نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به M است، پس داریم:



$$MP = ۴(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$OM = OP + MP = ۴ + (۴\sqrt{۲} - ۴) = ۴\sqrt{۲}$$

از طرفی چون OM بر AB عمود است (چرا؟) پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM، پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر است و می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$OA^۲ = OH \cdot OM \quad \Rightarrow \quad OH = \frac{OA^۲}{OM} = \frac{۴^۲}{۴\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$CM \times MB = DM \times ME \Rightarrow ۱ \times y = ۲ \times ۳ \Rightarrow y = ۶$$

$$AT^{۲} = AB \times AC \Rightarrow (۳\sqrt{۲})^{۲} = x(x + ۷)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۷x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x + ۹)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۹ & \text{غ ق ق} \\ x = ۲ \end{cases}$$

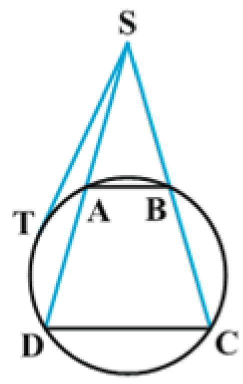
سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

طبق فرض در شکل زیر داریم: $AB = ۸$ و $CD = ۱۲$ و $AD = ۵$. چون $AB \| CD$ است، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{SA}{SA+۵} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow ۱۲SA = ۸SA + ۴۰$$

$$\Rightarrow ۴SA = ۴۰ \Rightarrow SA = ۱۰ \Rightarrow SD = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$



حال بر اساس روابط طولی دایره برای یک مماس و یک قاطع داریم:

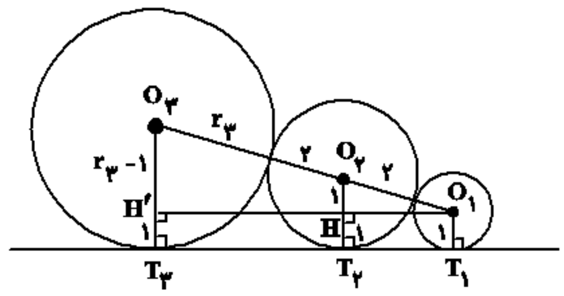
$$ST^{۲} = SA . SD = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰ \Rightarrow ST = ۵\sqrt{۶}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

$$T_۱ T_۲ = ۲\sqrt{r_۱ r_۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = ۲\sqrt{r_۱ \times ۲r_۱}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲r_۱^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow r_۱ = ۱ \Rightarrow r_۲ = ۲$$



مطابق شکل، $O_۲H \| O_۳H'$ است، بنابراین طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{O_۲H}{O_۳H'} = \frac{O_۱O_۲}{O_۱O_۳} \Rightarrow \frac{۱}{r_۳ - ۱} = \frac{۳}{r_۳ + ۵}$$

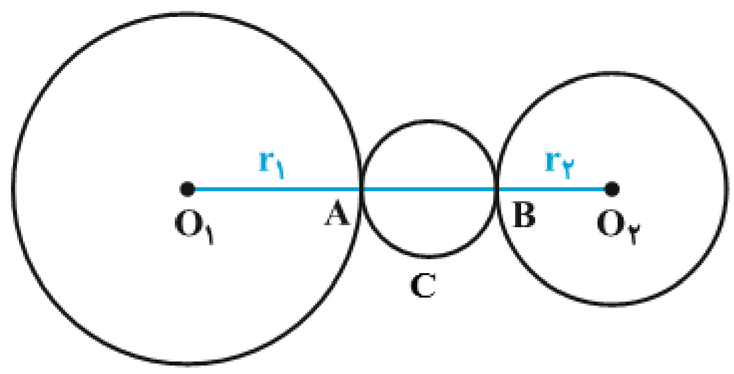
$$\Rightarrow r_۳ + ۵ = ۳r_۳ - ۳ \Rightarrow ۲r_۳ = ۸ \Rightarrow r_۳ = ۴$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

از آن‌جا که $O_۱O_۲ = d > r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴}$ دو دایرهٔ متخارج‌اند، مطابق شکل داریم:



$$AB = O_۱O_۲ - (r_۱ + r_۲) \Rightarrow AB = d - \frac{۳d}{۴} = \frac{d}{۴}$$

دایرهٔ C به قطر AB، کوچک‌ترین دایره‌ای است که بر هر دو دایره مماس است و شعاع آن برابر است با:

$$r = \frac{AB}{۲} = \frac{d}{۸}$$

سوال ۱۱

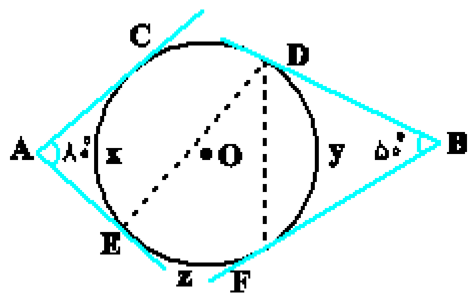
پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

طول وتر CD برابر شعاع دایره است، پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و $\overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$ می‌باشد. با فرض $\overset{\frown}{CE} = x$، $\overset{\frown}{DF} = y$ و $\overset{\frown}{EF} = z$ داریم:

$$\hat{B} = \frac{(۶۰^\circ+x+z)-y}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow x+z-y = ۴۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{(۶۰^\circ+y+z)-x}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow y+z-x = ۱۰۰^\circ$$



از جمع طرفین دو رابطه فوق داریم:

$$۲z = ۱۴۰^\circ \Rightarrow z = ۷۰^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat{D}F = \frac{z}{۲} = ۳۵^\circ$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\overset{\frown}{ADM} = ۲۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = ۳۶۰^\circ - ۲۹۰^\circ = ۷۰^\circ$$

$$A\hat{N}M = \frac{\overset{\frown}{ADM} - \overset{\frown}{AM}}{۲} = \frac{۲۹۰^\circ - ۷۰^\circ}{۲} = ۱۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{N}M = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج یک دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

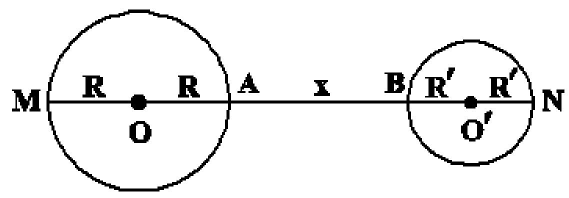
$$\overset{\Delta}{NBM} : NB = NM \Rightarrow N\hat{B}M = N\hat{M}B = \frac{۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ}{۲} = ۵۵^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{B}M = ۵۵^\circ$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل زیر، اگر کمترین فاصله نقاط دو دایره برابر $x = AB$ باشد، آن‌گاه داریم:



بیشترین فاصله دو دایره $= MN = R + R + x + R' + R'$

$$= ۲R + ۲R' + x = ۱۸ \xrightarrow{x=۸} ۲R + ۲R' + ۸ = ۱۸ \Rightarrow R + R' = ۵$$

$$d = OO' = R + R' + x = ۵ + ۸ = ۱۳$$

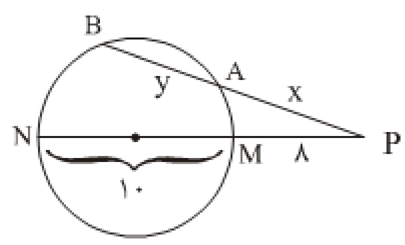
طول مماس مشترک داخلی دو دایره $= \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$

$$= \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فرض داریم: $x - y = ۲ \Rightarrow x = y + ۲$



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$PA.PB = PM.PN \Rightarrow x(x + y) = ۸ \times ۱۸$$
$$\Rightarrow (y + ۲)(y + ۲ + y) = ۸ \times ۱۸$$
$$\Rightarrow (y + ۲)(y + ۱) = ۴ \times ۱۸ = ۹ \times ۸ \Rightarrow y = ۷$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

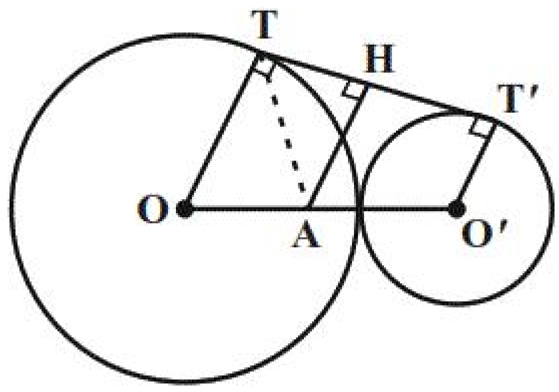
مطابق شکل $MT = MT'$ و $OT = OT'$ است، پس نقاط M و O بر روی عمودمنصف پاره‌خط TT' واقع‌اند، یعنی OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است و در نتیجه بر آن عمود می‌باشد. طبق فرض $OH = \frac{R}{۲}$ است، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه OHT داریم:

$$TH^۲ = OT^۲ - OH^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۳})^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{۳R^۲}{۴} = ۱۲ \Rightarrow R^۲ = ۱۶ \Rightarrow R = ۴$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج C و C′ با شعاع‌های R و R′ برابر است با: $TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{10\times 4} = 4\sqrt{10}$



مطابق شکل $AH \| OT \| O'T'$ و H وسط TT' است، پس طبق قضیه تالس در ذوزنقه، A وسط OO' بوده و در نتیجه در ذوزنقه $OTT'O'$ داریم:

$$AH = \frac{OT+O'T'}{2} = \frac{10+4}{2} = 7$$

حال در مثلث قائم الزاویه AHT طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AT^2 = AH^2 + TH^2 = 7^2 + (2\sqrt{10})^2$$
$$= 49 + 40 = 89 \Rightarrow AT = \sqrt{89}$$

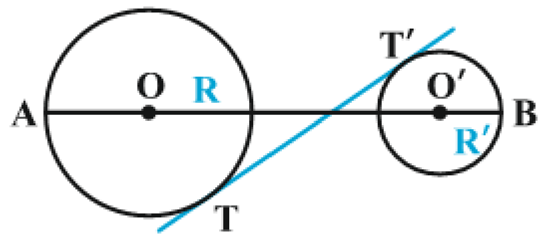
سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

دورترین نقاط دو دایرهٔ متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$، نقاط A و B در شکل زیر می‌باشد. در این صورت داریم:

$$AB = OO' + R + R' \Rightarrow 16 = 10 + R + R'$$
$$\Rightarrow R + R' = 6$$



طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R+R')^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

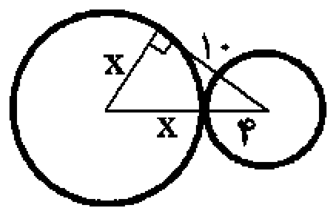
گزینه «۲»

می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

$(x+۴)^۲ = x^۲ + ۱۰^۲$

$/ + ۸x + ۱۶ = / + ۱۰۰$

$x = \frac{۸۴}{۸} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵$



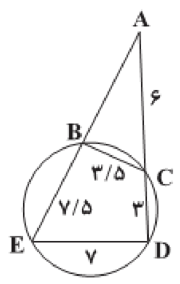
سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

چهارضلعی BCDE محیطی است. داریم:

$BC + DE = CD + BE \Rightarrow BE = ۳/۵ + ۷ - ۳ = ۷/۵$

چهارضلعی$BCDE$ همچنین محاطی نیز هست، پس دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم. طبق روابط طولی در دایره داریم:

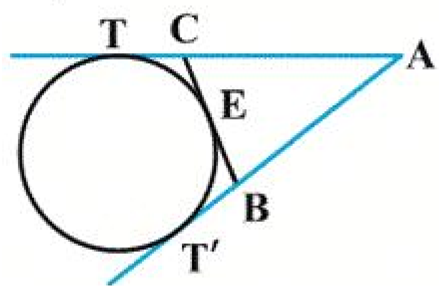


$AB \times AE = AC \times AD$
$\Rightarrow AB(AB + ۷/۵) = ۶ \times ۹$
$\Rightarrow AB = ۴/۵$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

چون از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT = AT'$ و داریم:



$$\begin{cases} BE = BT' \\ CE = CT \end{cases}$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث ABC $= AB + AC + BC$

$= AB + BE + CE + AC$

$= AB + BT' + CT + AC \quad = \quad AT' + AT = ۲AT$

سوال ۲۱

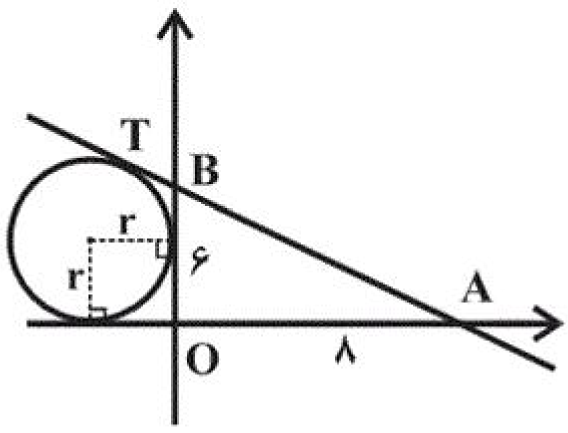
پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل، دایرهٔ مورد نظر دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع OB در مثلث OAB است. داریم:

$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow AB = ۱۰$

$P = \frac{۶+۸+۱۰}{۲} = ۱۲$.

$S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۲۴$

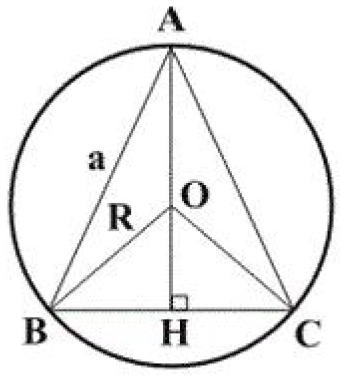


شعاع دایرهٔ محاطی خارجی : $r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۲۴}{۱۲-۶} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل همرسی عمود منصف‌های اضلاع آن مثلث است. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع و عمودمنصف نظیر یک ضلع برهم‌منطبق‌اند.



با توجه به اینکه میانه‌ها در هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:

$$OA = \frac{۲}{۳}AH \Rightarrow R = \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow a = \sqrt{۳}R$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^{۲}}{\pi R^{۲}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴\pi}$$

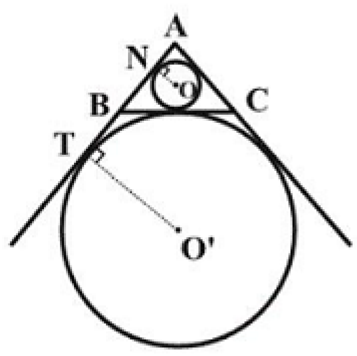
سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

در هر مثلث کوچک‌ترین دایره محاطی، دایره محاطی داخلی مثلث $\left(r = \frac{S}{P}\right)$ و بزرگ‌ترین دایره محاطی، دایره محاطی خارجی نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث $\left(r_a = \frac{S}{P-a}\right)$ است.

با توجه به تمرین ۶ صفحه ۳۰ کتاب درسی، طول پاره‌خط‌های AN و AT از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$AT = P$ و $AN = P - a$



با توجه به این‌که ضلع BC، بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است، بنابراین بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی مثلث ABC، نظیر این ضلع می‌باشد و در نتیجه خواسته سوال، محاسبه طول پاره‌خط NT است. داریم:

$$\text{مماس مشترک خارجی} = NT = AT - AN = P - (P - a) = a = ۷$$

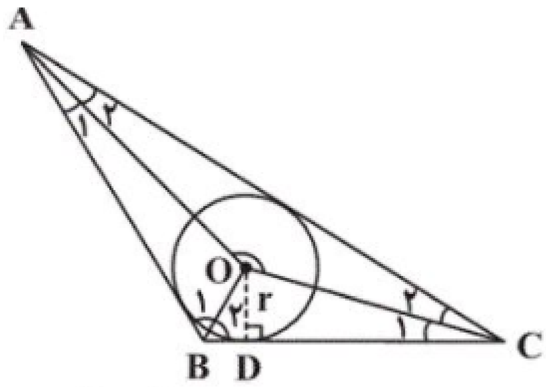
سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث، نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی آن مثلث است، بنابراین OB،OA و OC نیمسازهای زوایای داخلیA، B و Cدر مثلث ABC هستند و داریم:

$$\overset{\triangle}{OAC} : A\widehat{O}C + \widehat{A}_۲ + \widehat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۵۰^\circ + \frac{\widehat{A}}{۲} + \frac{\widehat{C}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



$$\Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = ۶۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$طول وتر است، بنابراین داریم:

$$\overset{\triangle}{BOD} : \hat{B}_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow OD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BO \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۱

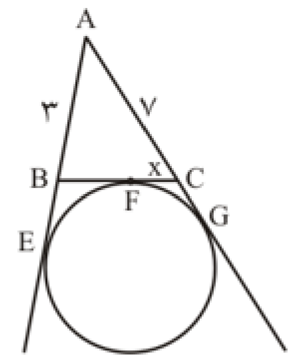
اگر CF = x آنگاه BF = ۵ − x و چون BF = BE، پس BE = ۵ − x. از طرفی طول دو مماس رسم شده از نقطه A بر دایره بر یکدیگر است، پس داریم:

$$AE = AG \Rightarrow ۳ + (۵ - x) = ۷ + x$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$BF = ۵ - \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

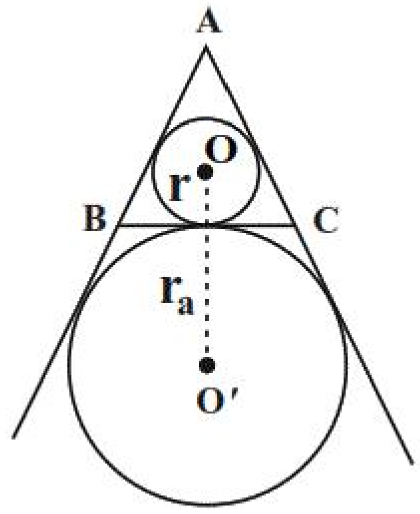
$$\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۱}{۹}$$



سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۱

مطابق شکل فاصله مرکز دایره محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC، برابر $OO' = r + r_a$ است که r شعاع دایره محاطی داخلی و r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. اگر S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشند، آنگاه داریم:



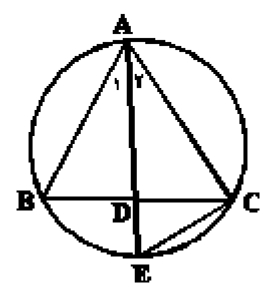
$$OO' = r + r_a = \frac{S}{P} + \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a} + \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a-a}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۲$$

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»



$$\hat{A}_۱ = B\hat{C}E = \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲} \hat{A}_۲ = B\hat{C}E$$

$$\left.\begin{matrix} \widehat{A}_۲ = B\widehat{C}E \\ \widehat{E} = \widehat{E} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} A\overset{\triangle}{E}C \sim D\overset{\triangle}{E}C \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{AE}$$

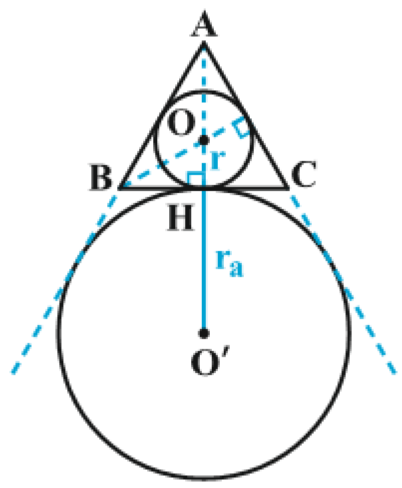
$$\Rightarrow AE \times DE = CE^۲$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

همان‌طور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، همان نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی است، پس مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، همان مرکز دایرهٔ محیطی است (نقطهٔ O در شکل زیر). پس مطابق شکل باید مجموع طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را حساب کنیم:



$$r = OH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳}{۲}a-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

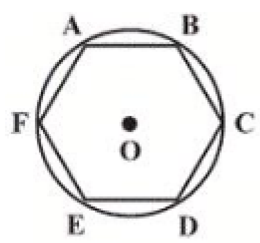
$$\Rightarrow OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a \qquad (*)$$

$$a = \sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} OO' = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۲$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۱

اگر شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۱۰} \Rightarrow r = \frac{۱۰}{۷}$$

طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

$$AB = ۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۶} AB = ۲ \times \frac{۱۰}{۷} \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۷}$$

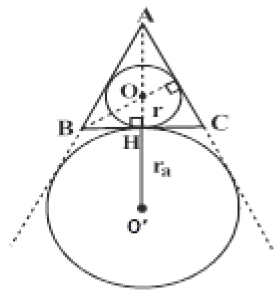
$$S_{ABCDEF} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times AB^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱۰۰}{۴۹} = \frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۹۸}$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

همان‌طور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، همان نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی است، پس مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، همان مرکز دایرهٔ محیطی است (نقطهٔ O در شکل زیر). پس مطابق شکل باید مجموع طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را حساب کنیم:

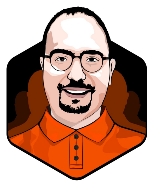


$$r = OH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\Rightarrow OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a \qquad (*)$$

$$a = \sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} OO' = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۲$$



آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه ۲ فصل۲ آزمایشی**

① بازتاب رأسA از مربع$ABCD$ را نسبت به قطرBD، A_1 و بازتاب A_1 نسبت به ضلعAB راA_2 می‌نامیم. زاویه دورانی به مرکزBکهA را بهA_2 تصویر می‌کند، چند درجه است؟

۱) ۲۲/ **۲)** ۴۵° **۳)** ۶۷/ **۴)** ۹۰°

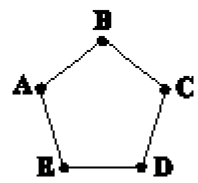
② کدام یک از تبدیل‌های زیر جهت شکل را حفظ <u>نمی‌کند</u>؟

۱) بازتاب **۲)** انتقال **۳)** دوران **۴)** تجانس

③ کدام ویژگی همواره در هر چهار تبدیل «بازتاب- انتقال- دوران- تجانس» وجود دارد؟

۱) داشتن نقطه ثابت تبدیل **۲)** طولپایی
۳) حفظ کردن جهت شکل **۴)** حفظ کردن اندازه زاویه

④ در شکل زیر، اگر نقاطA وC به‌ترتیب مجانس نقاطE وD در یک تجانس به مرکزO باشند، آن‌گاه نقطهO کجا قرار دارد؟



۱) روی رأسB واقع است.
۲) نقطه تلاقی قطرهایAD وCE است.
۳) نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاعAB وBC است.
۴) نقطه تلاقی امتداد اضلاعAE وCD است.

⑤ نقطه A در صفحه مفروض است. تناظر M به صورت زیر تعریف شده است. کدام گزینه در مورد M صحیح است؟

* اگر نقطه روی A منطبق باشد، آن گاه $M(A) = A$

* اگر نقطه روی A منطبق نباشد، آن گاه $M(B) = B'$ به طوری که نقطه A وسط پاره خط BB' است.

۱) M تبدیل نیست.
۲) M یک تبدیل است ولی طولپا نیست.
۳) M یک تبدیل طولپا است و فقط یک نقطه ثابت تبدیل دارد.
۴) M یک تبدیل طولپا است و بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

⑥ تناظر M بین نقاط صفحه و نقاط صفحه l به صورت زیر تعریف شده است. کدام گزینه در مورد این تناظر صحیح است؟

* اگر نقطه روی A منطبق باشد، آن گاه $M(A) = A$

* اگر نقطه روی A خاطر خط l باشد، آن گاه $M(A) = A'$ که A' پای عمود A بر l می باشد.

۱) M تبدیل نیست.
۲) M یک تبدیل است ولی طولپا نیست.
۳) M یک تبدیل طولپا است.
۴) M یک تبدیل طولپا است و بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

۷) اگرO نقطه دلخواهی از صفحه باشد، کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، تبدیل همانی نیست؟

۱) دوران به مرکزO و زاویه °۳۶۰
۲) انتقال با بردار صفر
۳) تجانس به مرکزO و نسبت۱ = k
۴) تجانس به مرکزO و نسبت۱- = k

۸) کدام یک از تبدیل‌های زیر هیچ‌گاه نمی‌توانند تبدیل همانی باشد؟

۱) انتقال
۲) دوران
۳) تجانس
۴) بازتاب

۹) دو خط d_1 و d_2 با زاویه۳۰ درجه یکدیگر را قطع می‌کنند. مثلث‌A‘B‘C بازتاب مثلثABC نسبت به خط d_1 است. سپس‌A‘B‘C را نسبت به d_2 بازتاب داده و آن راA“B“C” می‌نامیم. با تبدیلABC به”A“B“C کدام‌یک ثابت می‌ماند؟

۱) فقط شیب ضلع‌ها
۲) فقط طول ضلع‌ها
۳) هم شیب ضلع‌ها، هم طول ضلع‌ها
۴) نه شیب ضلع‌ها، نه طول ضلع‌ها

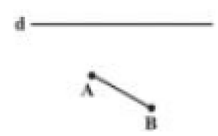
۱۰) تبدیل‌یافته مربعی به طول ضلع $۲\sqrt{۲}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت k، مربعی به طول قطر $\sqrt{۲}$ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۴ تحت این تجانس به مثلثی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

۱۱) کدام تبدیل غیرهمانی زیر، نقطه ثابت ندارد؟

۱) دوران
۲) تجانس
۳) بازتاب
۴) انتقال

۱۲) در شکل زیر فاصله نقطه‌هایA وB از خطd به‌ترتیب ۲ و۵ است. اگرA‘ وB‘ به‌ترتیب بازتاب نقاطA و B نسبت به خطd و فاصله وسط پاره‌خطAA‘ تا وسط پاره‌خطBB‘ برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد، مساحت چهارضلعیAA‘B‘B کدام است؟



۱) ۸/۵
۲) ۱۰/۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۴/۵

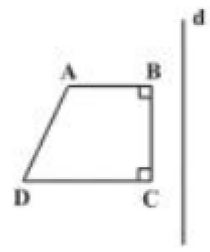
۱۳) کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.
۲) تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
۳) دو شکل متشابه همواره متجانس هستند.
۴) تجانس می‌تواند طولپا باشد.

۱۴) خطL روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط عمود بر همd وd‘ واقع است. خطL را با برداری به اندازهٔ یک واحد در راستای نیمساز دیگر زاویهٔ بینd وd‘ انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ محصور بین تصویرL و خطوطd وd‘ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۵) در شکل زیر ضلع BC از چهارضلعی ABCD موازی خط d است. در بازتاب چهارضلعی ABCD نسبت به خط d، شیب چه تعداد از اضلاع این چهارضلعی تغییر نمی‌کند؟

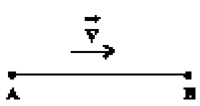


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶) در تجانس به مرکز O و نسبت k، کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) اگر $k > 0$، تجانس را تجانس مستقیم می‌نامیم.
۲) اگر $k < 0$، تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.
۳) اگر $k < -1$، تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود.
۴) اگر $k > 1$، تصویر شکل بزرگ‌تر می‌شود.

۱۷) در انتقال با بردار $\vec{v}$ (موازی پاره‌خط AB)، نقطه A به A′. و نقطه B به B′ تصویر می‌شود. اگر طول بردار $\vec{v}$، برابر b، $AB = a$ و $a > b$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط A′B کدام است؟



۱) $2a$
۲) $a + b$
۳) $a - b$
۴) $2a - b$

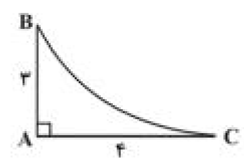
۱۸) کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) تبدیل طولپا همواره شیب خط را حفظ می‌کند.
۲) اگر تبدیلی اندازه زوایا را ثابت نگه دارد، قطعاً طولپا است.
۳) اگر تبدیلی شیب خط‌ها را ثابت نگه دارد، قطعاً طولپا است.
۴) تبدیل طولپا همواره اندازه زاویه‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۱۹) کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) تجانس معکوس جهت اشکال را حفظ می کند.
۲) تجانس اندازه زاویه ها و شیب خطوط را حفظ می کند.
۳) دو شکل متشابه، متجانس اند.
۴) تجانس با نسبت $|k| < 1$، انقباض نام دارد.

(۲۰) زمینی به شکل زیر داریم. می‌خواهیم با کمک تبدیل هندسی مناسب و بدون تغییر در محیط زمین و زاویه $\hat{A}$، مساحتش را افزایش دهیم. اگر مساحت زمین اولیه برابر۴ باشد، آن‌گاه مساحت زمین جدید کدام است؟

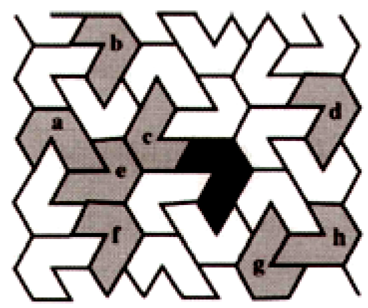


۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

(۲۱) کدام گزینه در مورد تبدیل دوران درست نیست؟

۱) طول پاره خط ها را حفظ می کند.
۲) اندازه زوایا را حفظ می کند.
۳) شیب خطوط را حفظ می کند.
۴) جهت شکل را همواره حفظ می کند.

(۲۲) در شکل مقابل، چند شکل سایه خورده انتقال یافته شکل سیاه رنگ می باشند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

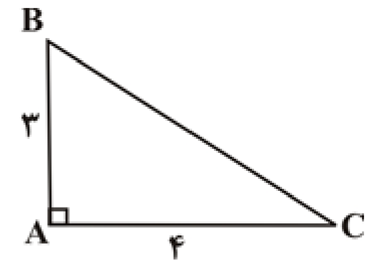
(۲۳) از بین مثلث هایی که در ضلع AB = ۱۶ مشترک و مساحت آن‌ها ۴۸ می‌باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

(۲۴) کدام گزینه در مورد تبدیل بازتاب صحیح نیست؟

۱) بازتاب اندازه زاویه را حفظ می کند.
۲) بازتاب در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی کند.
۳) بازتاب، بی شمار نقطه ثابت دارد.
۴) بازتاب لزوماً شیب خط را حفظ می کند.

۲۵ در مثلث قائم الزاویه زیر، R_1 دوران °۹۰ در جهت حرکت عقربه های ساعت به مرکز B و R_2 دوران °۹۰ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت به مرکز C است. اگر $R_1(A) = A'$ و $R_2(A) = A''$ باشند، اندازه $A'A''$ کدام است؟



۱) ۷
۲) $۷\sqrt{۲}$
۳) ۱۰
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

نام و نام خانوادگی:

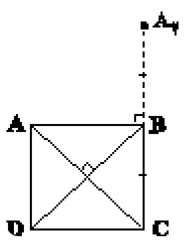
نام آزمون: **هندسه ۲ فصل۲ آزمایشی**

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

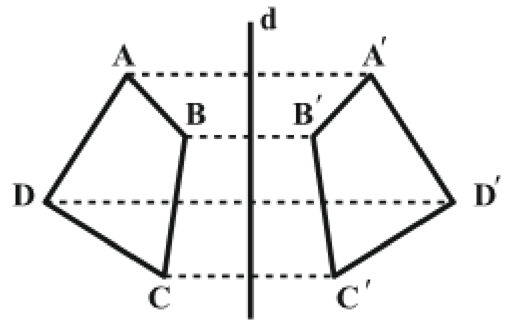
قطرهای یک مربع عمودمنصف یکدیگرند، پس تحت بازتاب نسبت به قطر BD، تصویرA یعنی A_1 بر رأس C منطبق می‌شود. مطابق شکل فرض کنید نقطهٔ A_2 بازتاب C نسبت به AB باشد. با توجه به‌اینکه $A_2B = AB$ و $A\hat{B}A_2 = 90^\circ$ است، پس A_2 تصویر نقطهٔA تحت دورانی به مرکزB و زاویهٔ 90°است.



سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند. به عنوان مثال مطابق شکل، در چهارضلعی ABCD وقتی به‌ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است ولی در چهارضلعی A′B′C′D′ وقتی به‌ترتیب از A′ به B′، C′ و D′ می‌رویم، جهت حرکت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد، پس جهت شکل تحت بازتاب نسبت به خط d عوض شده است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

انتقال غیرهمانی نقطه ثابت تبدیل ندارد ← رد گزینه «۱»

تجانس در حالت کلی طولپا نیست ← رد گزینه «۲»

بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند ← رد گزینه «۳»

همه تبدیل‌های بازتاب، انتقال، دوران و تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کنند.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

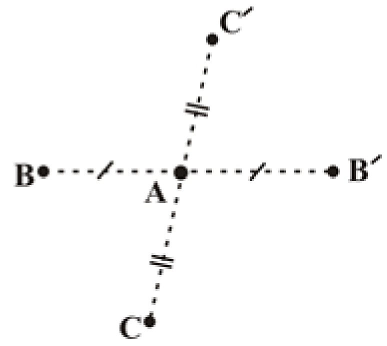
نقطهA مجانس نقطهE است، پس مرکز تجانس روی خط گذرنده از نقاطA وE قرار دارد. از طرفی نقطهC مجانس نقطهD است، پس مرکز تجانس روی خط گذرنده از نقاطC وD قرار دارد. در نتیجه مرکز تجانس محل برخورد امتداد اضلاعAE وCD خواهد بود.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

مطابق شکل این تناظر هر نقطه تصویر می کند و برعکس. پس M یک تبدیل است. با توجه به این که A همواره وسط پاره خط و اصل بین هر نقطه و تصویرش است، پس این تبدیل همواره اندازه پاره خط ها را حفظ می کند و طولپا است. نقطه ثابت این تبدیل فقط نقطه A است که تصویرش بر خودش منطبق می باشد.



سوال ۶

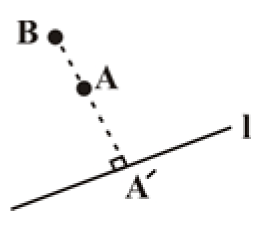
پاسخ: گزینه ۱

گزینه ی «۱»

M یک تبدیل نیست، زیرا همان طور که در شکل می بینید تصویر دو نقطه متمایز A و B از دامنه، بر هم منطبق می-باشند.

یعنی:

$M(A) = M(B) = A'$

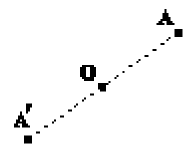


به بیانی دیگر شرط یک به یک بودن را ندارد.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

دوران با زاویه۳۶۰درجه و مضارب صحیح آن، تبدیل همانی است. همچنین انتقال با بردار صفر یک تبدیل همانی است. تجانس به مرکزO و نسبت۱ = k هم تبدیل همانی است اما همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، تجانس به مرکزO و نسبت۱- = k همانی نیست، زیرا تصویر هر نقطه بر خودش منطبق نمی‌شود.



سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

تحت بازتاب نسبت به یک خط، تنها تصویر نقاط واقع بر آن خط ثابت می‌ماند و تصویر سایر نقاط صفحه بر خود آن‌ها منطبق نیست، پس بازتاب هیچ‌گاه نمی‌تواند تبدیل همانی باشد. انتقال با بردار صفر، دوران با زاویه °۳۶۰(یا مضارب آن) و تجانس با نسبت۱ = k، تبدیل همانی هستند.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب متقاطع باشند، یک دوران است. همچنین اگر زاویه بین دو محور بازتابθ باشد، زاویه دوران۲θ خواهد بود پس زاویه دوران °۶۰ خواهد بود و در نتیجه شیب ضلع‌ها تغییر می‌کند ولی دوران تبدیلی طولپاست، پس طول ضلع‌ها ثابت می‌ماند.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم در یک تجانس به نسبت k، طول پاره‌خط‌ها |k| برابر و اندازه مساحت‌ها $k^۲$ برابر می‌شود. طول هر ضلع مربع به طول قطر $\sqrt{۲}$، برابر یک است، بنابراین در این تجانس $|k| = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ است. اگر S و S' به‌ترتیب مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ و مساحت مثلث تبدیل یافته تحت این تجانس باشند، داریم:

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{S'}{S} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{۴\sqrt{۳}} = \left(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow S' = \frac{۴\sqrt{۳}}{۸} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

سوال ۱۱

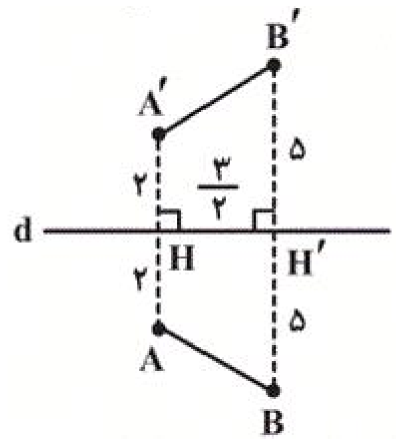
پاسخ: گزینه ۴

مرکز دوران، نقطه ثابت دوران است. مرکز تجانس نیز نقطه ثابت تجانس است. نقاط روی محور بازتاب، نقاط ثابت بازتاب می‌باشند ولی انتقال غیرهمانی نقطه ثابت ندارد.

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر H وسط پاره‌خط ‘AA و ‘H وسط پاره‌خط ‘BB باشد، داریم:



$$S = \left(\frac{AA' + BB'}{۲}\right) \times HH'$$
$$= \left(\frac{۴ + ۱۰}{۲}\right) \times \frac{۳}{۲} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵$$

سوال ۱۳

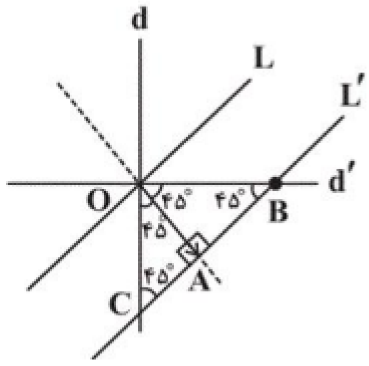
پاسخ: گزینه ۳

تجانس شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند و می‌تواند در حالت خاص ۱ = |k| تبدیلی طولپا نیز باشد، ولی دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند.

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

شکل مورد نظر مسأله را رسم می‌کنیم. خط L′ تصویر خط L با بردار انتقال $\overrightarrow{OA}$ است. خواستهٔ مسأله به دست آوردن مساحت مثلث OBC است. با توجه به شکل داریم:

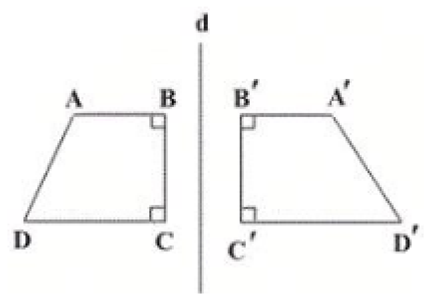


$$\begin{cases} OA = AB = ۱ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} OA \times AB = \frac{۱}{۲} \\ OA = AC = ۱ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAC}} = \frac{۱}{۲} OA \times AC = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}} = S_{\overset{\Delta}{OAB}} + S_{\overset{\Delta}{OAC}} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳



تحت یک بازتاب، در دو حالت شیب یک خط و بازتاب یافته آن یکسان است.

الف) در صورتی که خط با محور بازتاب موازی باشد.

ب) در صورتی که خط بر محور بازتاب عمود باشد.

بنابراین تحت این بازتاب، شیب اضلاع AB، BC و CD با شیب بازتاب یافته آن‌ها نسبت به خط d یکسان است

سوال ۱۶

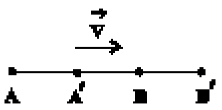
پاسخ: گزینه ۳

اگر $k < -۱$ باشد، آن‌گاه $|k| > ۱$ و در نتیجه تصویر شکل بزرگ‌تر می‌شود.

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم انتقال یک تبدیل طولپاست. حال با توجه به شکل داریم:

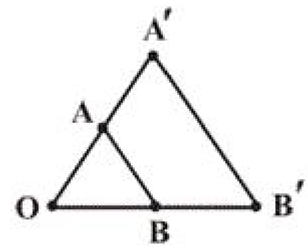


$$\begin{cases} AA' = BB' = b \\ A'B = AB - AA' \end{cases} \Rightarrow A'B = a - b$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه با آن است ولی تبدیل طولپا لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند. همچنین به عنوان مثال نقض برای گزینه‌های «۲» و «۳»، تبدیلی را درنظر بگیرید که مطابق شکل به هر نقطه مانند A در صفحه، نقطه‌ای مانند 'A در آن صفحه را نظیر می‌کند به گونه‌ای که نقطه 'A روی امتداد پاره‌خط OA قرار داشته (O نقطه ثابتی در صفحه است) و $OA' = ۲OA$ است.



تحت این تبدیل، اندازه زوایا و شیب خط‌ها ثابت می‌ماند.

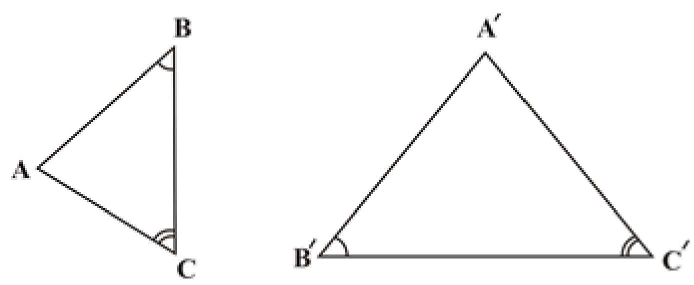
($m_{AB} = m_{A'B'}$ و $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$) ولی این تبدیل طولپا نیست ($AB \neq A'B'$).

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

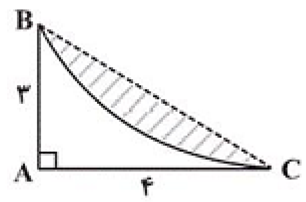
تجانس همواره جهت اشکال، اندازه زاویه ها و شیب خطوط را حفظ می کند. تجانس با نسبت $|k| < ۱$، انقباض و تجانس با نسبت $|k| > ۱$، انبساط نام دارد. دو شکل متجانس، متشابه اند ولی دو شکل متشابه، ممکن است متجانس نباشند. مطابق شکل دو مثلث ABC و 'A'B'C متشابه اند ولی متجانس نیستند.



سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۲

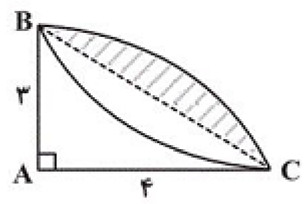
برای افزایش مساحت باید منحنی را نسبت به BC بازتاب بدهیم. ابتدا سطح محصور بین منحنی و پاره‌خط BC را به دست می‌آوریم:



$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\text{زمین اولیه}} + S_{\text{زمین سایه زده}}$

$\Rightarrow \frac{۳\times۴}{۲} = ۴ + S_{\text{زمین سایه زده}} \Rightarrow S_{\text{زمین سایه زده}} = ۲$

حال مساحت زمین جدید را به دست می‌آوریم:



$S_{\text{زمین جدید}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\text{سایه زده}} = ۶ + ۲ = ۸$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

دوران یک تبدیل طولپا محسوب می شود، لذا طول پاره خط و اندازه زوایا را حفظ می کند.

همچنین دوران جهت اشکال را نیز حفظ می کند.

اما دوران لزوماً شیب خطوط را حفظ نمی کند.

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۳

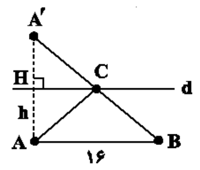
گزینه ی «۳»

می دانیم انتقال، شیب خطوط را حفظ می کند. بنابراین در صورت سؤال شکل هایی را شمارش می کنیم که اضلاع آن با اضلاع متناظر در شکل سیاه رنگ موازی باشد، یعنی شکل های d، b و f.

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مفروضات مسأله، ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AB را به‌دست می آوریم:



$$S_{ABC} = \frac{AB\times h}{۲} \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱۶\times h}{۲} \Rightarrow h = ۶$$

پس رأس C روی خطی به‌فاصلهٔ ۶ واحد از ضلع AB قرار دارد.

چون مقدار ثابت AB است و می‌خواهیم محیط ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مسأله تبدیل می‌شود به پیدا کردن رأس C روی خط d به‌طوری که مقدار $AC + BC$ کم‌ترین باشد. با توجه به مسأله اول هرون قرینهٔ A را نسبت به d پیدا می‌کنیم (نقطهٔ A')، چون $AC = A'C$ بنابراین حداقل مقدار $AC + CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

در مثلث قائم‌الزاویه $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^{۲} + AB^{۲}} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۱۶^{۲}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

پس کم‌ترین محیط برابر است با: $۱۶ + ۲۰ = ۳۶$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ی «۴»

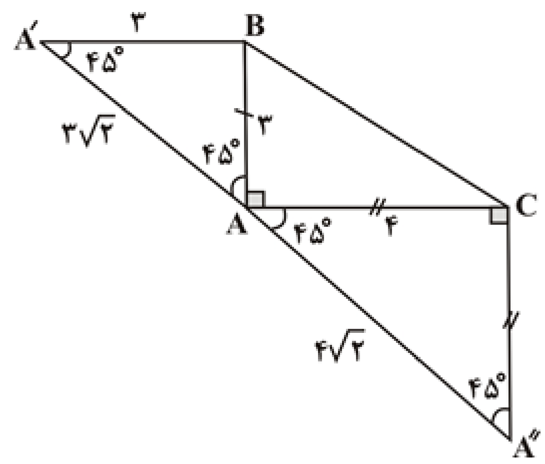
مطابق آنچه در درسنامه ذکر شد بازتاب در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی کند.

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»

مثلث های "ACA و 'ABA قائم الزاویه متساوی الساقین هستند.



A ، 'A و "A مطابق شکل روی یک راستا قرار دارد پس:

$$A'A'' = AA' + AA'' = ۳\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} = ۷\sqrt{۲}$$

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه ۲ فصل ۲ زماندار**

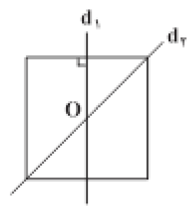
۱ اگر دایره $C'(O', ۳)$ مجانس دایره $C(O, ۴)$ در تجانس مستقیم به مرکز M باشد و داشته باشیم $MO = ۲۰$، آن‌گاه اندازه وتر مشترک دو دایره C و 'C کدام است؟

۱) ۲/۴ **۲)** ۳/۶ **۳)** ۴/۸ **۴)** ۶

۲ دایره$C(O, \sqrt{۲})$ تحت دورانی به مرکزA و با زاویه۳۰ درجه یا تحت تجانسی بر دایره'C تصویر می‌شود. اگر$OA = ۴$ باشد، فاصله مرکز تجانس تا خط شاملOA کدام است؟

۱) ۱ **۲)** $\sqrt{۲}$ **۳)** ۲ **۴)** $۲\sqrt{۲}$

۳ بازتاب مربع شکل زیر را ابتدا نسبت به خط $d_۱$ و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط $d_۲$ رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطه ثابت تبدیل دارد؟(O مرکز مربع است)



۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) ۱
۴) ۲

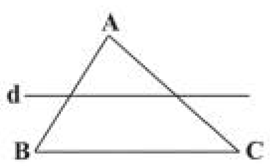
۴ اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و مساحت محصور بین مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{BG}$ برابر ۶ واحد مربع باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۶ **۲)** ۴۲
۳) ۴۸ **۴)** ۵۴

۵ نقطهA روی دایره$C(O, ۶)$ قرار دارد. این دایره را با زاویه ۱۲۰° حول مرکز آن دوران می‌دهیم. اگر تصویر نقطهA تحت این دوران نقطه'A باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط'AA کدام است؟

۱) ۳ **۲)** $۳\sqrt{۳}$ **۳)** ۶ **۴)** $۶\sqrt{۳}$

۶ مطابق شکل مثلثABC را نسبت به خطd که از وسط اضلاعAB وAC می‌گذرد، بازتاب می‌دهیم. اگر ناحیه محصور بینABC و تصویر آن ۵ باشد، مساحت مثلثABC کدام است؟



۱) ۲۵
۲) ۱۰
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۵

⑦ مثلث ABC به طول اضلاع ۱۲ = BC و ۲۰ = AC را حول رأس C دوران می‌دهیم تا بر مثلث A′B′C تصویر شود. اگر ۱۰ =′AA باشد، آن‌گاه طول ′BB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

⑧ پاره‌خط ′A′B بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d و نقطهٔ B، ۴ واحد باشد و راستای AB با محور بازتاب زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد، مساحت چهارضلعی ′ABB′A کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک‌تر است.)

۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) $۲۰\sqrt{۳}$
۳) $۳۰\sqrt{۳}$ ۴) $۴۰\sqrt{۳}$

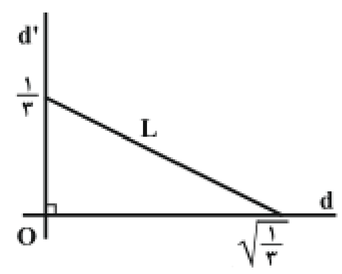
⑨ خط d و نقطه O به فاصله ۲ واحد از آن مفروض اند. خط d را تحت زاویه‌های ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۲۴۰ و ۳۰۰ درجه در یک جهت حول نقطه O دوران می‌دهیم. مساحت شکل حاصل از تقاطع خط‌ها کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

⑩ در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ۶ = BC و $\hat{B} = ۵\hat{C}$ است. اگر مثلث ′A′B′C تبدیل یافته مثلث ABC تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث ′A′B′C کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

⑪ در شکل مقابل خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت $\sqrt{\sqrt{۳}+۱}$ بر خط ′L تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین خط L و ′L و خطوط d و ′d کدام است؟

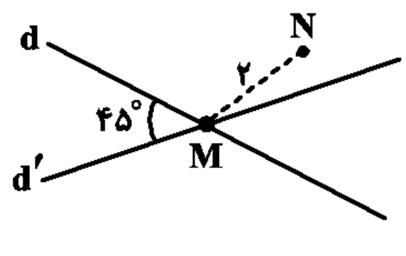


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

⑫ دایره (C (O , r را با برداری که طول آن ۳ برابر شعاع دایره است، انتقال می‌دهیم. طول مماس مشترک داخلی دایره C و تصویر آن، چند برابر شعاع است؟

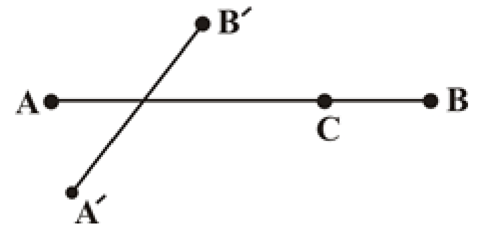
۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

⑬ مطابق شکل ۲ = NM و زاویه بین دو خط d و ′d برابر °۴۵ است. نقطه N را نسبت به خط ′d و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم. فاصله نقطه N از تصویر نهایی کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۸
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۴) فرض کنید T یک تبدیل طولپا و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ باشد. اگر مطابق شکل زیر، C نقطه ای روی پاره خط AB باشد و $T(C) = C'$، آن گاه تعداد نقاط ممکن در صفحه برای C' کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

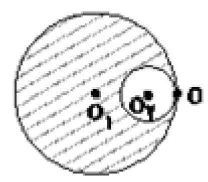
۱۵) دایره $C(O,۳)$ را نسبت به خطی که از مرکز این دایره ۵ واحد فاصله دارد، بازتاب می‌دهیم. اگر حاصل این بازتاب، دایره C' باشد، آنگاه طول مماس مشترک داخلی دو دایره C و C' کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۶) دو دایره متخارج با نسبت $\frac{۳}{۵}$ مجانس یکدیگرند. اگر فاصله مرکز تجانس از مرکز دایره کوچک‌تر۶ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۷) دایره$C(O_۱ , R_۱)$ را تحت تجانس به مرکزO و نسبت$\frac{۱}{۳}$ به دایره$C'(O_۲ , R_۲)$ تصویر کرده‌ایم. اگر$O_۱O_۲ = ۲$ باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

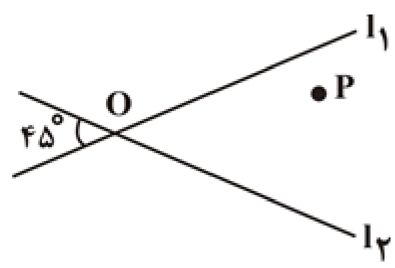


۱) ۲π ۲) ۴π
۳) ۸π ۴) ۱۲π

۱۸) دایره $C(O,۲)$ و نقطه A مفروض‌اند. اگر $OA = ۳$ و دایره $C'(O',R')$ مجانس دایره C به مرکز A و نسبت $k = ۳$ باشد، آنگاه طول مماس مشترک خارجی دو دایره C و C' کدام است؟

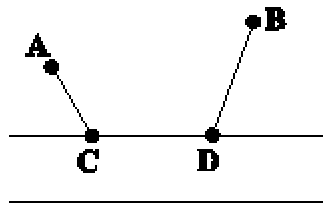
۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۱۹) در شکل زیر، قرینه P نسبت به خط $l_۱$ نقطه $P_۱$ و قرینه $P_۱$ نسبت به خط $l_۲$ نقطه $P_۲$ است. هر گاه فاصله P تا O برابر ۴ باشد. طول $PP_۲$ کدام است؟



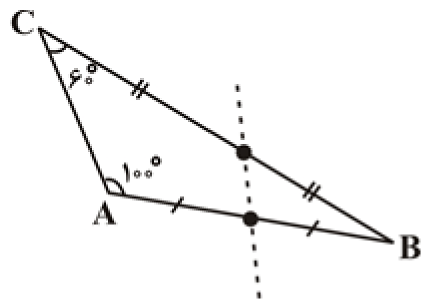
۱) ۴
۲) ۸
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

⑳ دو شهرA و B مطابق شکل زیر به فاصله ۱۰ کیلومتر از یکدیگر در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند. می‌خواهیم از A به B جاده‌ای بسازیم به طوری که ۳ کیلومتر آن کنار رودخانه باشد. اگر دو شهر A و B به‌ترتیب ۳ و ۹ کیلومتر از رودخانه فاصله داشته باشند، طول کوتاه‌ترین جاده ممکن کدام است؟



۱) ۱۳
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

㉑ مطابق شکل خط d از وسط اضلاع AB و BC می گذرد. تبدیل S بازتاب نسبت به خط d است. اگر S(B) = B′ باشد، اندازه زاویه AB′B کدام است؟



۱) °۶۰
۲) °۹۰
۳) ° ۱۰۰
۴) ° ۱۲۰

㉒ متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. یک تبدیل نقطه A را به نقطه C و نقطه B را به نقطه D تصویر می کند. کدام گزینه در مورد این تبدیل <u>نادرست</u> است؟

۱) این تبدیل معادل یک تجانس معکوس است.
۲) این تبدیل اندازه زاویه ها را حفظ کرده و طولپا است.
۳) این تبدیل معادل یک دوران است.
۴) نقطه ثابت این تبدیل روی یکی از اضلاع متوازی الاضلاع است.

㉓ در مثلث ABC ، نقطه A را تحت بردار $\overrightarrow{BC}$ به نقطه ′A، نقطه B را تحت بردار $\overrightarrow{CA}$ به نقطه ′B و نقطه C را تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ به نقطه ′C انتقال می دهیم. مساحت مثلث A′B′C′ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۴ **۴)** ۹

㉔ مساحت مثلث ABC برابر ۴ است. M وسط ضلع AC است. مثلث را تحت بردار $\overrightarrow{AM}$ انتقال می دهیم تا مثلث A′B′C′ به دست آید. مساحت ناحیه مشترک بین دو مثلث کدام است؟

۱) ۱ **۲)** $\sqrt{2}$ **۳)** ۲ **۴)** ۴

۲۵ از بین همه ذوزنقه‌هایی با قاعده‌های به طول ۵ و۷ که در قاعده به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می‌باشند، کم‌ترین محیط ممکن کدام است؟

۱) ۱۶

۲) $۱۶+\sqrt{۲۰}$

۳) $۱۲+\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $۱۲+۲\sqrt{۱۷}$

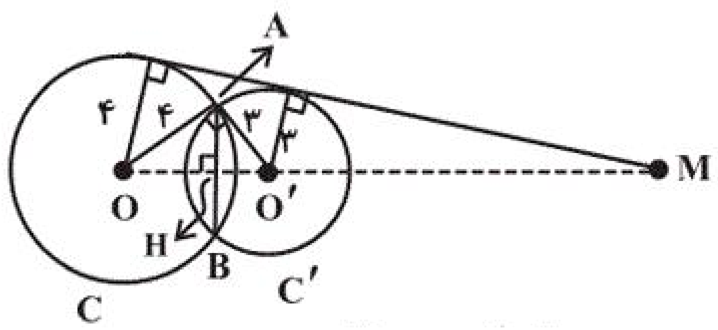
آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه ۲ فصل ۲ زماندار**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳



در دو دایره متجانس، اندازه نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است.

$$|k| = \frac{r'}{r} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{تجانس مستقیم}} k = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{MO=۲۰} MO' = ۱۵ \Rightarrow OO' = ۵$$

بنابراین طبق عکس قضیه فیثاغورس، مثلث OAO' قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

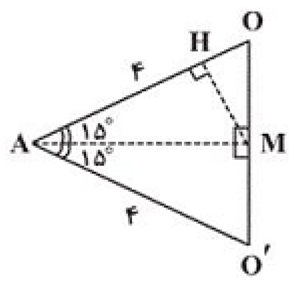
$$AH \times OO' = AO \times AO' \Rightarrow AH \times ۵ = ۴ \times ۳ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

خط‌المرکزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است و در نتیجه داریم: $AB = ۲AH = ۴/۸$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

شکل صورت مسأله را رسم می‌کنیم. شعاع دو دایره برابر است. (چون تبدیل دوران طولپاست.) پس این تجانس طولپا است و با توجه به این که تجانس همانی نیست، پس این تجانس، تجانس معکوس با نسبت $k = -۱$ است و مرکز تجانس وسط OO' است. خواسته مسأله طول MH است. مثلث OAM یک مثلث قائم‌الزاویه است که زاویه ۱۵ درجه دارد، پس ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، بنابراین:

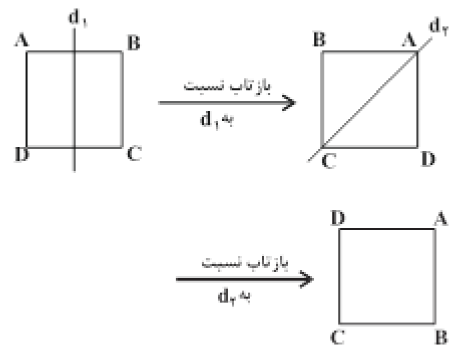


$$MH = \frac{OA}{۴} = ۱$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



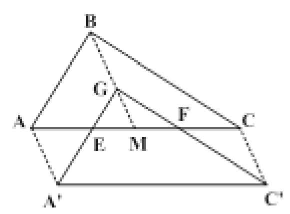
در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط یعنی به اندازه ۹۰°

در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط d_1 و d_2 یعنی مرکز مربع) است.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»



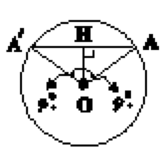
انتقال یافته یک خط با آن خط موازی است، پس مثلث‌های ABC و EGF به حالت تساوی زاویه‌هایشان متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{EGF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{GM}{BM}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۶}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ \Rightarrow S_{ABC} = ۵۴$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم طول ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰° در مثلث قائم‌الزاویه، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است، بنابراین داریم:



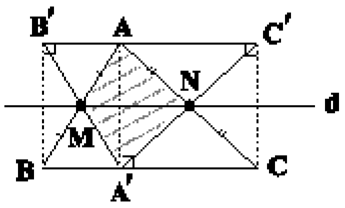
$AH = A'H = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times OA = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$

$AA' = AH + A'H = ۶\sqrt{۳}$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

خطی که وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم آن است. پس: $d \| BC$. چون d از وسط AB و AC می‌گذرد (و موازی BC است)، پس بازتاب A نسبت به d، پای ارتفاع رأس A می‌باشد (یعنی A' روی BC است). با همین استدلال اگر $B'C'$ بازتاب BC نسبت به d باشد، A نیز روی $B'C'$ است. چهارضلعی‌های $AB'BA'$ و $AC'CA'$ به وضوح مستطیل هستند و می‌دانیم در مستطیل با رسم دو قطر چهار مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید. پس :



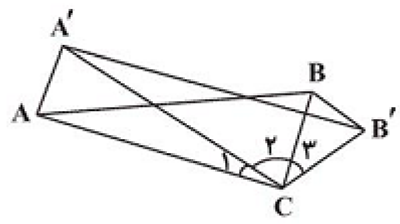
$$S_{\overset{\triangle}{BMA'}} = S_{\overset{\triangle}{AMA'}} \quad S_{\overset{\triangle}{NA'C}} = S_{\overset{\triangle}{ANA'}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ABA'}} + S_{\overset{\triangle}{ACA'}} = ۲S_{\overset{\triangle}{AMA'}} + ۲S_{\overset{\triangle}{ANA'}}$$

$$= ۲(\underbrace{S_{\overset{\triangle}{AMA'}} + S_{\overset{\triangle}{ANA'}}}_{۵}) = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲



مطابق شکل با توجه به این‌که تبدیل دوران طولپاست، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} AC = A'C \\ BC = B'C \end{cases}$$

حال با توجه به ثابت بودن زاویه دوران می‌توان نوشت:

$$A\hat{C}B = A'\hat{C}B' \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}_۲ + \hat{C}_۳ \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{C}_۳$$

پس دو مثلث متساوی‌الساقین ACA' و BCB' دارای زاویه رأس برابر هستند، پس متشابه‌اند.

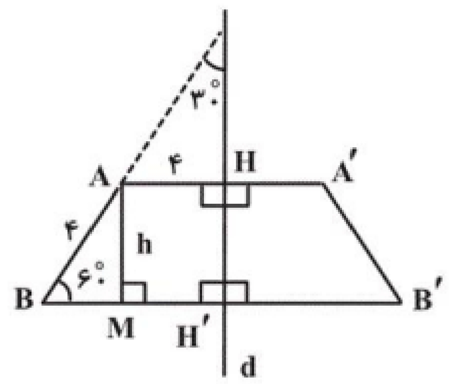
با نوشتن نسبت تشابه طول BB' مشخص می‌شود:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۱۰}{BB'} = \frac{۲۰}{۱۲} \Rightarrow BB' = ۶$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

از آنجا که AA' و BB' هر دو بر محور بازتاب عمودند، با هم موازی هستند. از طرفی بازتاب تبدیلی طولپاست، پس $AB = A'B'$ و در نتیجه چهارضلعی $ABB'A$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. پس داریم:



$$h = AB \sin ۶۰^\circ = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$AA' = ۲AH = ۸$$

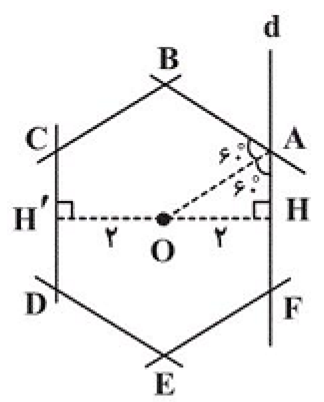
$$BM = AB \cos ۶۰^\circ = ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۲ \Rightarrow BH' = ۶ \Rightarrow BB' = ۲BH' = ۱۲$$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA'+BB')h}{۲} = \frac{(۸+۱۲)\times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲۰\sqrt{۳}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

شکل حاصل یک شش‌ضلعی منتظم است می‌دانیم هر شش‌ضلعی منتظم، از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است، پس مساحت هر شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})$ است.



حال با توجه به شکل داریم:

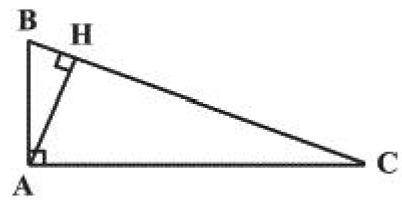
$$\tan(O\hat{A}H) = \frac{OH}{AH} \Rightarrow \underbrace{\tan ۶۰^\circ}_{\sqrt{۳}} = \frac{۲}{AH} \Rightarrow AH = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow AF = ۲AH = \frac{۴}{\sqrt{۳}} \Rightarrow S_{ABCDEF} = \frac{۶(a^۲\sqrt{۳})}{۴}$$

$$= \frac{۶\times(\frac{۴}{\sqrt{۳}})^۲\times\sqrt{۳}}{۴} = ۸\sqrt{۳}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=۵\hat{C}} ۶\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

می‌دانیم اگر اندازه یکی از زوایای حاده مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۵° باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، پس داریم:

$$AH=\frac{۱}{۴}BC=\frac{۱}{۴}\times ۶=\frac{۳}{۲}$$

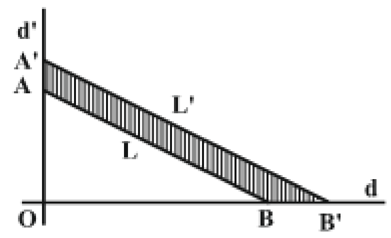
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times ۶=\frac{۹}{۲}$$

از طرفی در یک تبدیل طولپا، طول اضلاع مثلث و در نتیجه مساحت آن ثابت می‌ماند، پس $\frac{۹}{۲}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}$ است.

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث $OA'B'$ برابر $k^۲S$ است. (دو شکل متجانس، همواره متشابه‌اند.)



$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{۱}{۲}OA\times OB=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\sqrt{\frac{۱}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$$

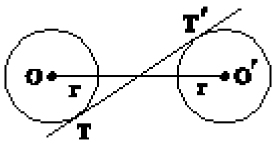
$$S_{AA'B'B}=S_{\overset{\Delta}{OA'B'}}-S_{\overset{\Delta}{OAB}}=k^۲S-S=(k^۲-۱)S$$

$$\xrightarrow[S=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}]{k=\sqrt{\sqrt{۳}+۱}} S_{AA'B'B}=(\sqrt{۳}+۱-۱)\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}=\frac{۱}{۶}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

چون انتقال یک تبدیل طولپاست، پس شعاع دایره C'، برابر r می‌باشد. طول خط‌المرکزین دو دایره، برابر طول بردار انتقال، یعنی ۳ برابر شعاع دایره است، بنابراین داریم:



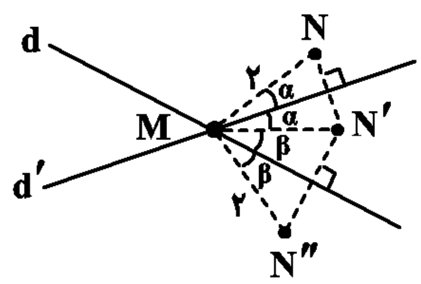
$d = OO' = ۳r$

$TT' = \sqrt{d^۲ - (r+r)^۲} = \sqrt{۹r^۲ - ۴r^۲} = \sqrt{۵}r$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل اگر زاویه NM با خط d' برابر α و زاویه $N'M$ با خط d برابر β باشد، آن‌گاه داریم



$\alpha + \beta = ۴۵^\circ \Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۹۰^\circ$

بنابراین مثلث MNN'' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و داریم:

$NN''^۲ = MN^۲ + MN''^۲ = ۲^۲ + ۲^۲ = ۸ \Rightarrow NN'' = ۲\sqrt{۲}$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

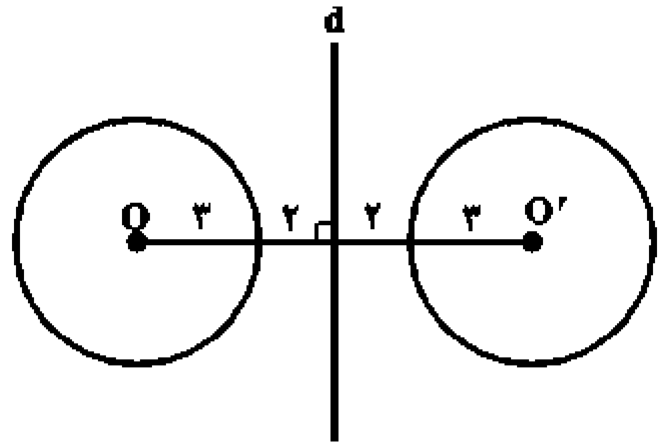
گزینه ی «۱»

چون تبدیل T طولپا است، پس $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ می باشد، یعنی نقطه C' محل تلاقی دو دایره یکی به مرکز A' و به شعاع AC و دیگری به مرکز B' و به شعاع BC است. اما از آنجا که $A'B' = AB = AC + BC$ می‌باشد. پس دو دایره مماس خارج هستند یعنی فقط یک نقطه در صفحه برای C' امکان پذیر است.

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

بازتاب تبدیلی طولپا است، پس شعاع دایره ′C نیز برابر ۳ است. از طرفی مطابق شکل طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۱۰ است، در نتیجه داریم:



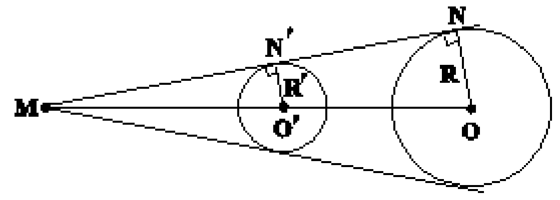
طول مماس مشترک داخلی $= \sqrt{OO'^{۲} - (R + R')^{۲}}$

$= \sqrt{۱۰^{۲} - (۳ + ۳)^{۲}} = \sqrt{۶۴} = ۸$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

هر دو دایره متخارج به مرکز محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی دو دایره متجانس یکدیگرند و نسبت شعاع‌ها برابر نسبت تجانس است، یعنی $\frac{۳}{۵} = \frac{R'}{R}$ است.

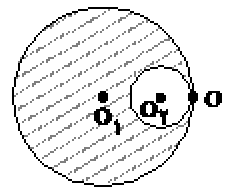


$\overset{\Delta}{MON}$: $O'N' \| ON \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{MO'}{MO} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{MO} \Rightarrow MO = ۱۰$

طول خط‌المرکزین : $OO' = MO - MO' = ۱۰ - ۶ = ۴$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۳



دو دایره C و C′ مماس داخل هستند. نقطه تماس این دو دایره مرکز تجانس است. با توجه به تعریف تجانس داریم:

$$\frac{OO_۲}{OO_۱} = |k| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow OO_۱ = ۳OO_۲$$

$$O_۱O_۲ = OO_۱ - OO_۲ = ۲OO_۲ = ۲ \Rightarrow \begin{cases} OO_۲ = R_۲ = ۱ \\ OO_۱ = R_۱ = ۳ \end{cases}$$

مساحت قسمت هاشورخورده برابر با تفاضل مساحت این دو دایره است.

$$S_{\text{هاشورخورده}} = \pi R_۱^۲ - \pi R_۲^۲ = ۹\pi - \pi = ۸\pi$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

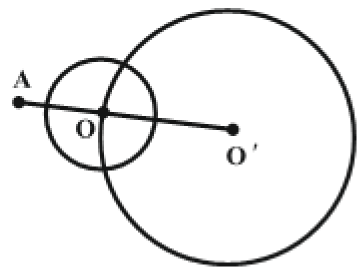
$$\frac{O'A}{OA} = ۳ \Rightarrow \frac{O'A}{۳} = ۳ \Rightarrow O'A = ۹$$

$$OO' = O'A - OA = ۹ - ۳ = ۶$$

$$\frac{R'}{R} = ۳ \Rightarrow \frac{R'}{۲} = ۳ \Rightarrow R' = ۶$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲}$$

$$= \sqrt{۶^۲ - (۲ - ۶)^۲} = \sqrt{۳۶ - ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

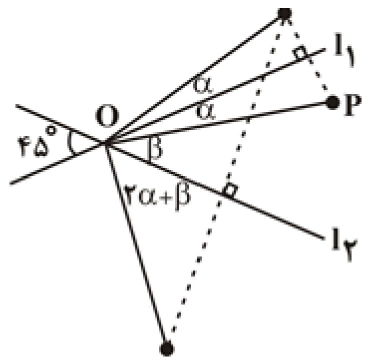


سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»

مطابق آنچه در شکل می بینیم می توان نوشت:



$$\alpha + \beta = ۴۵^\circ \Rightarrow P_۲\hat{O}P = ۲(\alpha + \beta) = ۹۰^\circ$$

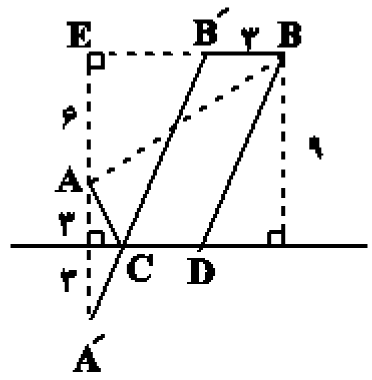
پس مثلث $P_۲OP$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

$$PP_۲^۲ = OP^۲ + OP_۲^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ \Rightarrow PP_۲^۲ = ۳۲ \Rightarrow PP_۲ = ۴\sqrt{۲}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نقطه A را نسبت به رودخانه بازتاب می دهیم تا نقطه 'A به دست آید سپس نقطه B را به اندازه ۳ کیلومتر (برابر طول CD) موازی با CD به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطه 'B حاصل شود.



چهار ضلعی B'BDC متوازی‌الاضلاع است، پس B'C = BD است. طبق مسئله هرون برای پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و 'B داریم:

$$A\overset{\Delta}{E}B : BE^{۲} = AB^{۲} - AE^{۲} = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow BE = ۸$$

$$B'E = BE - BB' = ۸ - ۳ = ۵$$

$$A'\overset{\Delta}{E}B' : A'B'^{۲} = A'E^{۲} + B'E^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۶۹$$
$$\Rightarrow A'B' = ۱۳$$

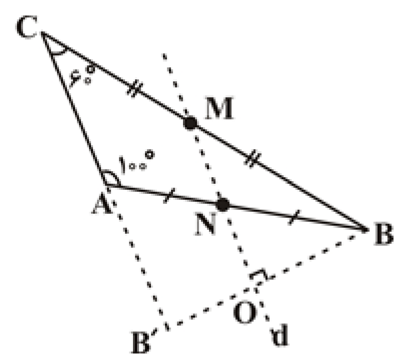
$$\Rightarrow A'C + CB' = ۱۳ \Rightarrow AC + BD = ۱۳$$

طول کوتاه‌ترین جاده = AC + CD + BD = ۱۳ + ۳ = ۱۶

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ی «۲»



فرض کنیم خط d اضلاع مثلث را در نقاط M و N قطع کند، داریم:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{AN} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} d \| AC$$

خط d با 'AB موازی و خط d بر 'BB عمود است (چون خط d محور بازتاب B و 'B می باشد) پس 'AB بر 'BB عمود است. در نتیجه:

$$AB' \perp BB' \Rightarrow A\hat{B'}B = ۹۰°$$

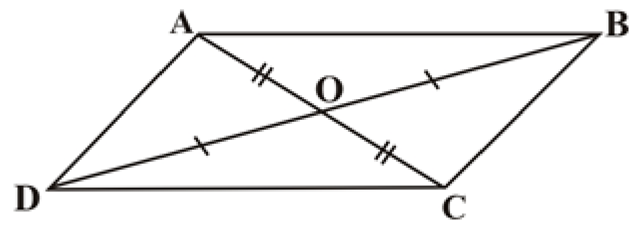
سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ی «۴»

در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند، یعنی AO=CO و BO=DO، می توان این تبدیل را معادل دوران به مرکز O با زاویه °۱۸۰ یا معادل تجانس به مرکز O با نسبت تجانس k = −۱ در نظر گرفت. این تبدیل معادل یک تجانس معکوس (k = −۱ < ۰) است که اندازه زاویه ها را حفظ کرده و طولپا است.

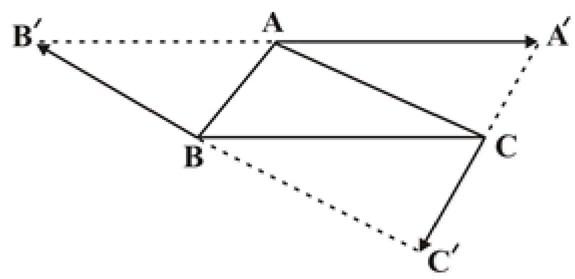
نقطه ثابت این تبدیل نقطه O (محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع) است.



سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ی «۳»



بنابر توضیحات مسئله داریم:

$\begin{cases} AA' \parallel BC \\ AA' = BC \end{cases} \Rightarrow$ AA′CB متوازی الاضلاع است

$\begin{cases} BB' \parallel AC \\ BB' = BC \end{cases} \Rightarrow$ AB′BC متوازی الاضلاع است

$\begin{cases} CC' \parallel AB \\ CC' = AB \end{cases} \Rightarrow$ ABC′C متوازی الاضلاع است

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\Delta}{AA'C}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{ABB'}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{BCC'}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} \end{cases}$$

یعنی:

$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = ۴S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

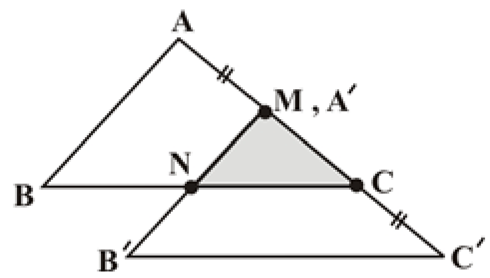
سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ی «۱»

انتقال، شیب خطوط را حفظ می کند پس:

$$\begin{cases} AB \| MB' \\ BC \| B'C' \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MNC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$



داریم:

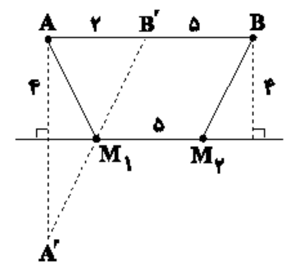
$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MC}{AC}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow S_{MNC} = \frac{۱}{۴} \times ۴ = ۱$$

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

این مساله را می‌توان در قالب مساله کوتاه‌ترین مسیر هرون حل کرد. کافیست طول کوتاه‌ترین مسیر$AM_۱M_۲B$ را تعیین کنیم که مسیر $M_۱M_۲$ روی خطی به موازات خط AB قرار دارد و طول آن ۵ می‌باشد. فاصله نقاط B وA از این خط همان ارتفاع ذوزنقه است که با استفاده از مساحت به دست می‌آید. $\frac{۱}{۲}(۵+۷)\times h = ۲۴ \Rightarrow h = ۴$

کافیست کم‌ترین مقدار $AM_۱ + BM_۲$ را تعیین کنیم:



کم‌ترین مقدار برای $AM_۱ + BM_۲$

$$= AM_۱ + M_۱B' = A'M_۱ + M_۱B' = A'B' = \sqrt{۲^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷}$$

$\Rightarrow$ کمترین محیط ذوزنقه $= ۵ + ۷ + ۲\sqrt{۱۷} = ۱۲ + ۲\sqrt{۱۷}$

مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

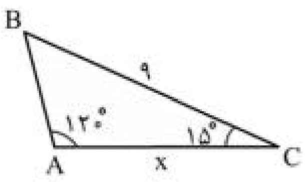
نام آزمون: **آزمون هندسه یازدهم فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵

آکادمی کوچینگ منثور
رخشان

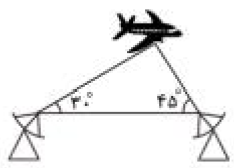
---

۱) در شکل روبه‌رو، مقدارx کدام است؟



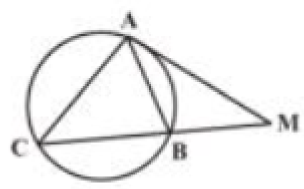
۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲) مطابق شکل زیر، دو ایستگاه رادار، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و۴۵ درجه رصد کرده‌اند. اگر مجموع فاصله‌های هواپیما از دو ایستگاه برابر$۱-\sqrt{۳}$ کیلومتر باشد، فاصله این دو ایستگاه از یکدیگر چند کیلومتر است؟ ($\sin ۷۵° = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$)



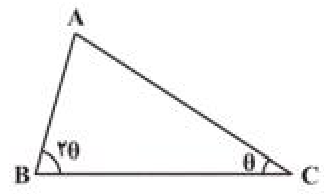
۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}-۱$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲-\sqrt{۲}$

۳) در شکل زیر MA در نقطه A بر دایره مماس است. اگر$MA = ۱۲$، $MB = ۴\sqrt{۳}$ و $\widehat{BC} = ۱۲۰°$ باشد، اندازه شعاع دایره چقدر است؟



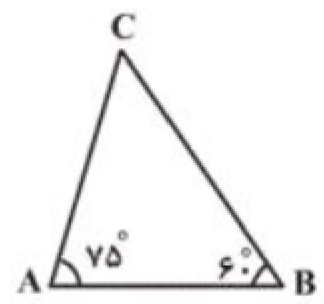
۱) ۸
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) ۶

④ مطابق شکل در مثلث ABC، اگر $AB = ۱۰$ باشد، طول AC کدام است؟ ($\cos\theta = \frac{۳}{۵}$)



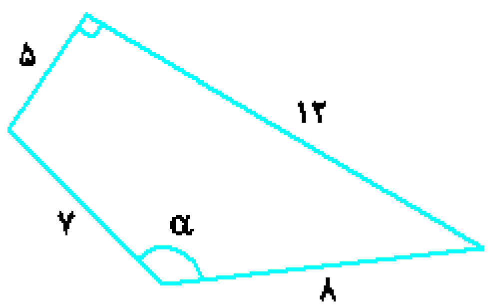
۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

⑤ در شکل مقابل حاصل $\frac{AC}{AB}$ کدام است؟



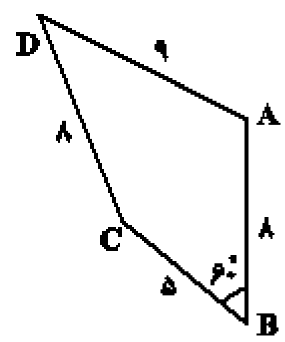
۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

⑥ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند. $\sin\alpha$ کدام است؟



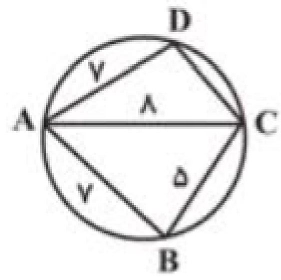
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

⑦ در شکل مقابل، $\cos\hat{D}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

(۸) در شکل زیر اندازه CD کدام است؟



۱) ۳
۲) $\frac{۱۰}{۳}$
۳) $\frac{۱۱}{۳}$
۴) ۴

(۹) در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ واحد،نقطه D روی ضلع BC به فاصله۷ واحد از راس A قرار دارد.فاصله نقطه D از ضلع AB ، چندبرابر فاصله آن از ضلع AC است؟ (BD<CD)

۱) ۰.۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

(۱۰) در مثلث ABC، $AB = ۲\sqrt{۲}$، $AC = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. اندازه زاویه B چند درجه است؟

۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۷۵

(۱۱) در مثلث ABC، ضلع BC = ۴ و میانه AM = ۶ است. اگر نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC، دو ضلع AB و AC را به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند، آن‌گاه مقدار $MP^۲ + MQ^۲$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۱۸

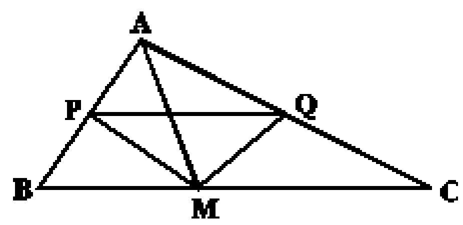
(۱۲) در یک مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز وارد بر وتر، آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲/۵ و ۷/۵ تقسیم می‌کند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰

(۱۳) در مثلث ABC ،AB=۴، BC=۹ و $\sin\hat{B} = ۲\sin\hat{C}$ می‌باشد. طول نیمساز داخلی AD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۱۴}$
۳) $\sqrt{۱۵}$
۴) ۴

(۱۴) مثلث ABC به طول اضلاع $AB = ۴\sqrt{۲}$، $AC = ۶\sqrt{۲}$ و BC = ۸ مفروض است. اگر M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMB و AMC باشند، طول پاره خط PQ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۸
۳) ۵/۶
۴) ۶/۴

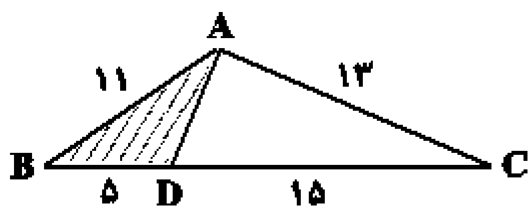
۱۵) در مثلث ABC، نیمساز AD است؛ به‌طوری که AB = AD، BD = ۲ و CD = ۳ است. طول AD کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۶) طول یک ضلع مثلثی ۷ و طول میانه‌های وارد بر دو ضلع دیگر آن ۴/۵ و ۷/۵ واحد است. مساحت این مثلث چند برابر $\sqrt{۳}$ واحد مربع است؟

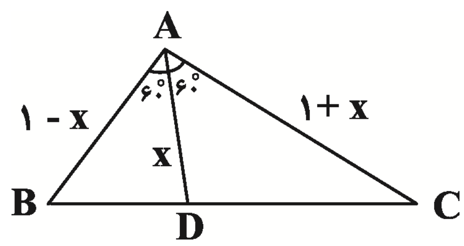
۱) ۱۱/۲۵ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۱/۷۵ ۴) ۱۲

۱۷) با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث ABD کدام است؟



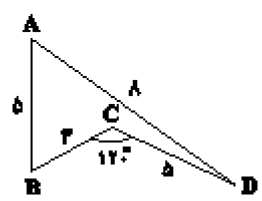
۱) ۱۶/۵
۲) ۲۲
۳) ۳۸/۵
۴) ۴۴

۱۸) در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\sqrt{۲} - ۱$
۴) $\sqrt{۳} - ۱$

۱۹) در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های داده‌شده، مساحت چهارضلعی ABCD چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



۱) ۶
۲) ۶/۲۵
۳) ۶/۵
۴) ۶/۷۵

۲۰) مساحت مثلث ABC با فرض a = ۵۰ و b = ۳۰ و m_a = ۱۱ (میانه وارد بر BC) کدام است؟

۱) ۲۶۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۴۲ ۴) ۲۲۰

مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه یازدهم فصل۳ آموزشی**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵

آکادمی کوچینگ منتور رخشان

سوال ۱

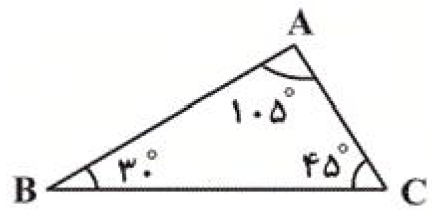
پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مثلث رسم شده، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ می‌باشد، حال طبق قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۹}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{x}{\sin ۴۵^\circ} \to \frac{۹}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \to x = ۳\sqrt{۶}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴



با توجه به شکل و نوشتن قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{AC}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow AB = \sqrt{۲}\,AC$$

با توجه به فرض مسئله $AB + AC = \sqrt{۳} - ۱$ است. پس:

$$AB + AC = \sqrt{۲}AC + AC = \sqrt{۳} - ۱ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

$$= (\sqrt{۳} - ۱)(\sqrt{۲} - ۱)$$

حال با نوشتن دوباره قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{BC}{\sin ۱۰۵^\circ}$$

$$\xrightarrow[\text{۷۵° و ۱۰۵° مکمل اند}]{\sin ۷۵^\circ = \sin ۱۰۵^\circ} \frac{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۲}-۱)}{\frac{۱}{۲}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$\Rightarrow BC = (۲ - \sqrt{۲})km$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

$$MA^{۲} = MB \times MC \Rightarrow ۱۲^{۲} = ۴\sqrt{۳}(۴\sqrt{۳} + BC)$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ = ۴۸ + ۴\sqrt{۳}BC \Rightarrow ۴\sqrt{۳}BC = ۹۶$$

$$\Rightarrow BC = \frac{۹۶}{۴\sqrt{۳}} = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} = ۸\sqrt{۳}$$

زاویه محاطی: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$

در مثلث ABC با توجه به قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = ۲R \Rightarrow \frac{۸\sqrt{۳}}{\sin ۶۰^\circ} = ۲R \Rightarrow \frac{۸\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۲R \Rightarrow R = ۸$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

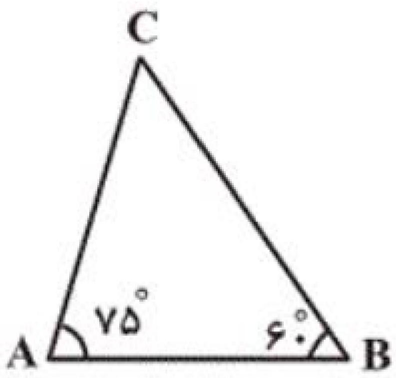
طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin ۲\theta} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \theta}{\sin ۲\theta} = \frac{\sin \theta}{۲ \sin \theta \cos \theta} = \frac{۱}{۲ \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{AC} = \frac{۱}{۲ \cos \theta} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow AC = ۱۲$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} + ۷۵^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۴۵^\circ$$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

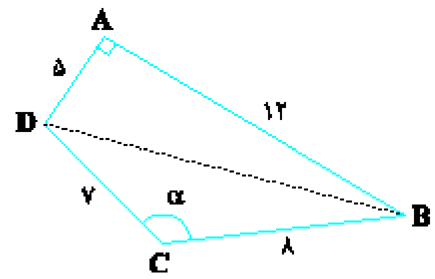
$$\frac{AC}{AB} = \frac{۲R \sin \hat{B}}{۲R \sin \hat{C}} = \frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

$$\overset{\Delta}{AB}D : BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۶۹ \Rightarrow BD = ۱۳$$



طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲} - ۲BC \times CD \times \cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۶۹ = ۶۴ + ۴۹ - ۲ \times ۸ \times ۷ \times \cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۱۲\cos\alpha = -۵۶$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-۵۶}{۱۱۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱۲۰^{\circ} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

سوال ۷

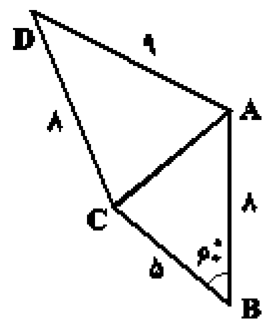
پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲AB \times BC \times \cos\hat{B}$$

$$= ۶۴ + ۲۵ - ۲ \times ۸ \times ۵ \times \frac{۱}{۲} = ۴۹$$



طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$AC^{۲} = AD^{۲} + CD^{۲} - ۲AD \times CD \times \cos\hat{D}$$

$$\Rightarrow ۴۹ = ۸۱ + ۶۴ - ۲ \times ۹ \times ۸ \times \cos\hat{D}$$

$$\Rightarrow ۱۶ \times ۹\cos\hat{D} = ۹۶ \Rightarrow \cos\hat{D} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

از آنجا که ABCD محیطی است، بنابراین دو زاویه روبه‌رو مکمل هم هستند:

$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \cos \hat{B} = -\cos \hat{D}$

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$\overset{\triangle}{ABC} : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB . BC . \cos \hat{B}$

$۶۴ = ۴۹ + ۲۵ - ۷۰ \cos \hat{B} \Rightarrow ۷۰ \cos \hat{B} = ۱۰$

$\Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow \cos \hat{D} = -\frac{۱}{۷}$

$\overset{\triangle}{ADC} : AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ - ۲AD . DC . \cos \hat{D}$

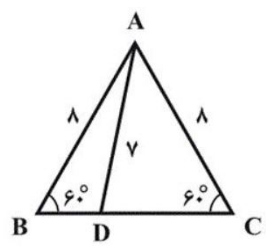
$۶۴ = ۴۹ + DC^۲ - ۱۴ \times DC \times (-\frac{۱}{۷}) \Rightarrow DC^۲ + ۲DC - ۱۵ = ۰$

$\Rightarrow (DC + ۵)(DC - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} DC = -۵ & \text{غ ق ق} \\ DC = ۳ & \text{ق ق} \end{cases}$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

طبق فرض سوال، ضلع AB به نقطه D نزدیک تر است.باتوجه به قضیه کسینوس ها اندازه پاره خط های BD و CD مشخص می شود.

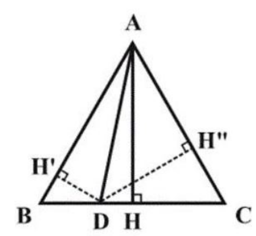


$AD^۲ = AB^۲ + BD^۲ - ۲AB \times BD \times \cos ۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۴۹ = ۶۴ + BD^۲ - ۲ \times ۸ \times BD \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD^۲ - ۸BD + ۱۵ = ۰$

$\Rightarrow (BD - ۳)(BD - ۵) = ۰ \xrightarrow{BD<CD} \begin{cases} BD = ۳ \\ CD = ۵ \end{cases}$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثلث های ABD و ACD داریم:

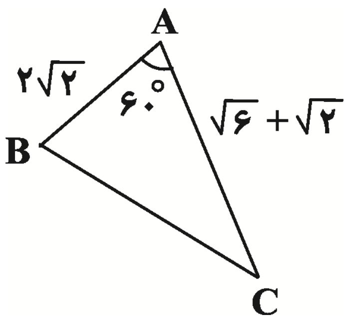


$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \frac{\frac{۱}{۲} BD \times AH}{\frac{۱}{۲} CD \times AH} = \frac{\frac{۱}{۲} DH' \times AB}{\frac{۱}{۲} DH'' \times AC}$

$\Rightarrow \frac{DH'}{DH''} = \frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴



ابتدا با کمک قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BC را می‌یابیم:

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^{۲} = ۸ + ۸ + ۴\sqrt{۳} - ۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶} + \sqrt{۲}) \times (\frac{۱}{۲}) = ۱۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۳}$$

حال به کمک قضیه سینوس‌ها، اندازه $\hat{C}$ و از آنجا زاویه B را می‌یابیم:

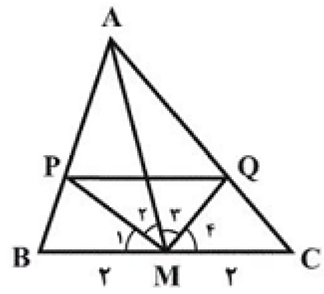
$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin \hat{C}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰^{\circ}}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = ۴۵^{\circ} \\ \hat{C} = ۱۳۵^{\circ} \quad \text{(غ ق ق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = ۱۸۰^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{C}) = ۱۸۰^{\circ} - (۶۰^{\circ} + ۴۵^{\circ}) = ۷۵^{\circ}$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AMB}: \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM} = \frac{۶}{۲} = ۳ \\ \overset{\triangle}{AMB}: \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CM} = \frac{۶}{۲} = ۳\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC}$$

بنابراین با توجه به عکس قضیه تالس نتیجه می‌گیریم که $PQ \| BC$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AP+BP} = \frac{AM}{AM+BM} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{۳}{۴}BC = \frac{۳}{۴} \times ۴ = ۳$$

حال با توجه به این‌که MP و MQ نیمساز زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC هستند، می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{M}_۳ = \hat{M}_۴]{\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ = ۹۰^\circ$$

پس مثلث PMQ قائم‌الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$MP^۲ + MQ^۲ = PQ^۲ = ۳^۲ = ۹$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

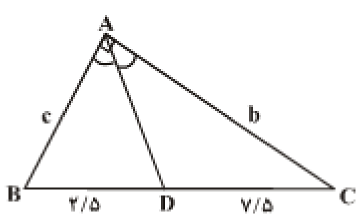
با توجه به شکل و فرض مسئله و طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$\text{نیمساز } AD: \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{۲/۵}{۷/۵} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = ۳c \qquad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: AC^۲ + AB^۲ = BC^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۱۰۰$$

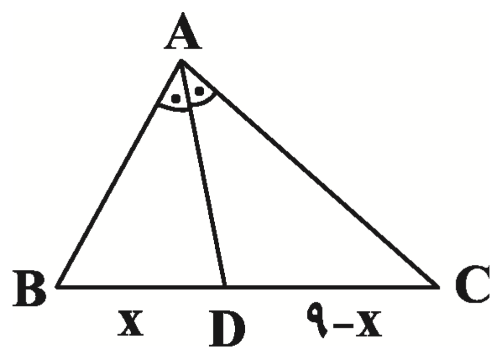
$$\xrightarrow{(۱)} ۹c^۲ + c^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow c = \sqrt{۱۰}, b = ۳\sqrt{۱۰}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AC.AB = \frac{b.c}{۲} = ۱۵$$



سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۲



قضیه سینوس‌ها : $\frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}$

$\Rightarrow \frac{AC}{۴} = ۲ \Rightarrow AC = ۸$

قضیه نیمسازها : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۹-x} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow ۲x = ۹ - x \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow BD = ۳ \;,\quad DC = ۶$

بنابراین:

$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC$

$\Rightarrow AD^{۲} = ۴ \times ۸ - ۳ \times ۶ = ۳۲ - ۱۸ = ۱۴ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۴}$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$AB^{۲} + AC^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{BC^{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۲ + ۷۲ = ۲AM^{۲} + ۳۲$

$\Rightarrow AM^{۲} = ۳۶ \Rightarrow AM = ۶$

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث AMB داریم:

$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ترکیبنسبتدرمخرج}} \frac{Ap}{AB} = \frac{۳}{۵}$

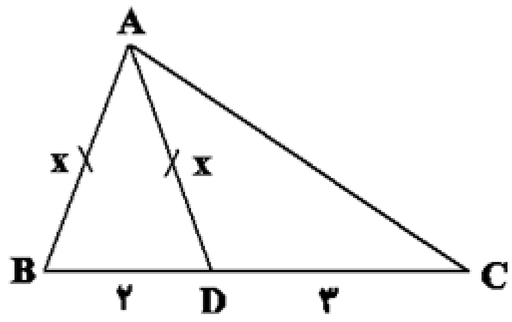
از طرفی طبق تمرین ۱ صفحه ۷۲ کتاب درسی پاره‌خط PQ موازی ضلع BC است، پس طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$PQ \| BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{PQ}{۸} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow PQ = ۴/۸$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فرض $AB = AD$ است، اگر مقدار آن‌ها را x فرض کنیم، طبق قضیه نیمسازها داریم:



$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AC = \frac{۳}{۲}AB \xrightarrow{AB=x} AC = \frac{۳}{۲}x$$

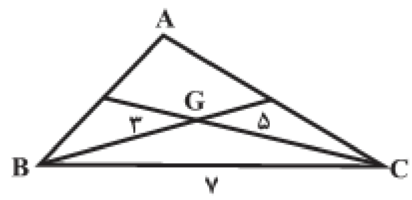
$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow AD^{۲} = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow x^{۲} = (x \times \frac{۳}{۲}x) - ۲ \times ۳$$

$$\Rightarrow x^{۲} = \frac{۳}{۲}x^{۲} - ۶ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۲} = ۶ \Rightarrow x^{۲} = ۱۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

پس $AD = x = ۲\sqrt{۳}$ است.

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۱



می‌دانیم میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین با معلوم بودن طول سه ضلع مثلث GBC، با استفاده از رابطه هرون، مساحت آن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{GBC}} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲}\left(\frac{۱۵}{۲} - ۷\right)\left(\frac{۱۵}{۲} - ۵\right)\left(\frac{۱۵}{۲} - ۳\right)} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

اگر از نقطه همرسی میانه‌ها به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌شود، پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۳S_{\overset{\triangle}{GBC}} = \frac{۴۵}{۴}\sqrt{۳} = ۱۱/۲۵\sqrt{۳}$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از قضیه هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

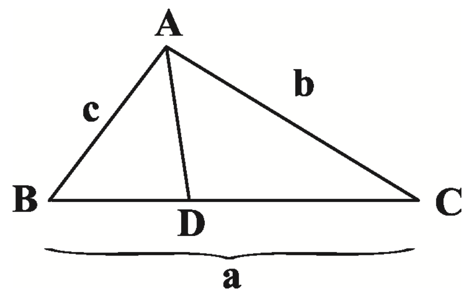
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \sqrt{۲۲(۲۲-۲۰)(۲۲-۱۳)(۲۲-۱۱)} = ۶۶$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{BD}{BC} = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۶۶}{۴} = ۱۶/۵$$

سوال ۱۸

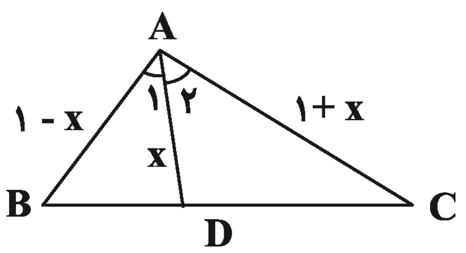
پاسخ: گزینه ۳



اگر در مثلث ABC، پاره خط AD نیمساز رأس A باشد، طبق تمرین ۵ صفحه ۷۶ کتاب درسی داریم:

$$AD = \frac{۲bc\ .\ \cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}$$

حال مطابق شکل سؤال داریم:



(AD نیمساز است؛ چون $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۶۰^\circ$ است.)

$$AD = \frac{۲bc\ \cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c} \Rightarrow x = \frac{۲(۱+x)(۱-x)\cos ۶۰^\circ}{(۱+x)+(۱-x)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱-x^۲}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

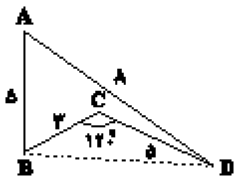
$$\Rightarrow x = \frac{-۲+\sqrt{۸}}{۲} = -۱ + \sqrt{۲}$$

دقت داشته باشید که x، طول پاره‌خط AD می‌باشد، لذا مقادیر منفی نمی‌تواند اختیار کند.

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

کافی است از B به D وصل کنیم و سپس قضیه کسینوس‌ها را در مثلث BCD به کار ببریم:



$$\overset{\Delta}{BCD} \quad : DB^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲} - ۲BC \times CD \times \cos ۱۲۰^{\circ}$$

$$= ۳^{۲} + ۵^{۲} - ۲ \times ۳ \times ۵ \times \left(-\tfrac{۱}{۲}\right) = ۴۹ \Rightarrow BD = ۷$$

اکنون قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ABD به کار می‌بریم:

$$\overset{\Delta}{ABD} \quad : BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} - ۲AB \times AD \times \cos \hat{A}$$

$$۴۹ = ۲۵ + ۶۴ - ۲ \times ۵ \times ۸ \times \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \tfrac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^{\circ}$$

حال مساحت چهارضلعی ABCD را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} - S_{\overset{\Delta}{BCD}}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}AB \times AD \times \sin \hat{A} - \tfrac{۱}{۲} \times BC \times CD \times \sin \hat{C}$$

$$= \tfrac{۱}{۲} \times ۵ \times ۸ \times \sin ۶۰^{\circ} - \tfrac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۱۲۰^{\circ}$$

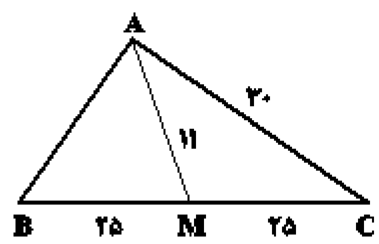
$$= \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴} = ۶/۲۵\sqrt{۳}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به شکل مقابل طول هر سه ضلع مثلث AMC معلوم است و به کمک رابطه هرون می‌توان مساحت آن را به‌دست آورد.



$$P = \frac{۱۱+۲۵+۳۰}{۲} = ۳۳$$

$$S_{AMC} = \sqrt{۳۳(۳)(۸)(۲۲)} = \sqrt{۳^{۲} \times ۱۱^{۲} \times ۲^{۴}} = ۱۳۲$$

همچنین میانه AM مساحت مثلث ABC را نصف کرده است. بنابراین داریم:

$$S_{ABC} = ۲S_{AMC} = ۲ \times ۱۳۲ = ۲۶۴$$

مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه یازدهم فصل۳ زماندار**

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵

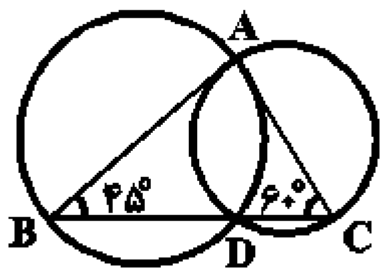
آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

---

۱) در چهارضلعی محاطی ABCD، $\hat{A} = 90^\circ$ است. نسبت $\frac{AB}{AD}$ در این چهارضلعی برابر کدام است؟

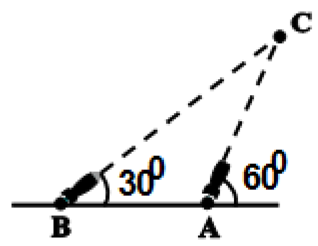
۱) $\sin(A\hat{C}B)$ **۲)** $\sin(A\hat{C}D)$ **۳)** $\tan(A\hat{C}B)$ **۴)** $\tan(A\hat{C}D)$

۲) در شکل زیر دو دایره در نقاط A و D متقاطع‌اند. اگر BC از نقطه D بگذرد، مساحت دایره بزرگ‌تر چند برابر مساحت دایره کوچک‌تر است؟



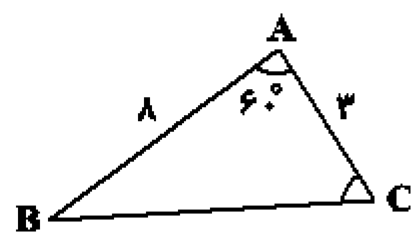
۱) ۱/۵ **۲)** $\sqrt{۲}$ **۳)** $\sqrt{۳}$ **۴)** ۲

۳) مطابق شکل، موشک ۱ از نقطه تحت زاویه ۶۰° و موشک ۲ از نقطه B تحت زاویه ۳۰° نسبت به سطح زمین، روی یک مسیر مستقیم پرتاب می‌شوند. اگر موشک ۱ بعد از طی یک کیلومتر به نقطه C برسد، موشک ۲ پس از طی چند کیلومتر به همان نقطه می‌رسد؟



۱) ۱/۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۱/۵
۴) $\sqrt{۳}$

۴) در شکل مقابل، $\sin\hat{C}$ کدام است؟

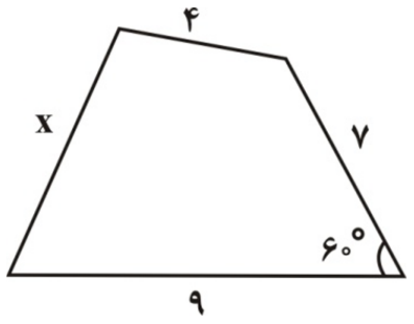


۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۷}$
۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۴}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۴}$

۵) مثلث ABC که رابطه $\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C}}{۴}$ بین زاویه‌های آن برقرار است، درون یک دایره محاط می‌باشد. اگر $AC = \sqrt{۳}$ باشد، اندازه شعاع این دایره کدام است؟

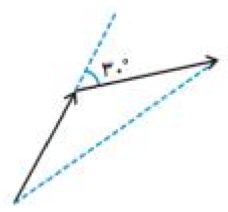
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶) چهار ضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. $(x+۲)$ کدام است؟



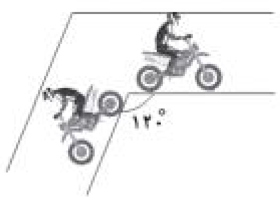
۱) $\sqrt{۵۱}$
۲) $\sqrt{۵۵}$
۳) $\sqrt{۵۷}$
۴) $\sqrt{۵۹}$

۷) قایقی به مدت ۵ ثانیه با سرعت ثابت $۳/۶\frac{m}{s}$ در حرکت است. سپس جهت حرکتش را ۳۰ درجه منحرف کرده و به مدت ۶ ثانیه با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ ادامه حرکت می‌دهد. مقدار جابه‌جایی این متحرک در این مدت چه‌قدر است؟



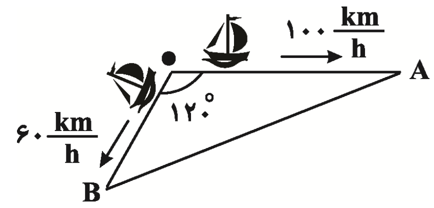
۱) $۱۲\sqrt{۱۳-۶\sqrt{۳}}$ ۲) $۶\sqrt{۱۳-۶\sqrt{۳}}$
۳) $۱۲\sqrt{۱۳+۶\sqrt{۳}}$ ۴) $۶\sqrt{۱۳+۶\sqrt{۳}}$

۸) دو موتورسوار مطابق شکل از یک نقطه در دو جاده متفاوت که زاویه بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است، با سرعت‌های ثابت ۱۵ و۴۸ کیلومتر بر ساعت از هم دور می‌شوند. بعد از۲۰ دقیقه دو موتورسوار در چه فاصله‌ای برحسب کیلومتر از یکدیگر هستند؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

⑨ دو قایق از یک نقطه در دریاچه، با سرعت‌های $\frac{km}{h}$ ۶۰ و $\frac{km}{h}$ ۱۰۰ و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. بعد از نیم ساعت، دو قایق چند کیلومتر از هم فاصله دارند؟



۱) ۷۰
۲) $۳۵\sqrt{۲}$
۳) $۳۵\sqrt{۳}$
۴) ۶۰

⑩ اندازه میانه‌های مثلثی برابر با ۴، ۵ و ۷ می‌باشد. مجموع مربعات اندازه‌های اضلاع آن کدام است؟

۱) ۶۰　　۲) ۹۰　　۳) ۱۰۰　　۴) ۱۲۰

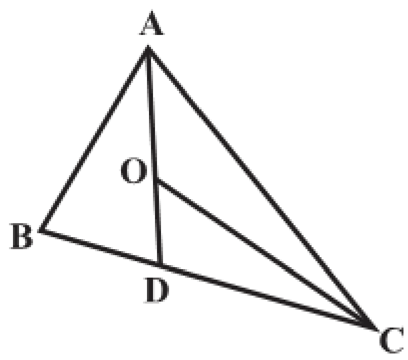
⑪ در مثلث ABC، BC = ۱۴ و حاصل ضرب طول‌های دو ضلع دیگر از مجذور طول نیمساز داخلی AD، ۴۸ واحد بیشتر است. نسبت طول‌های دو ضلع زاویه A در این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۵}$　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۳}{۴}$

⑫ در مثلث ABC، AB = ۸، AC = ۴ و BC = ۹ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی A کدام است؟

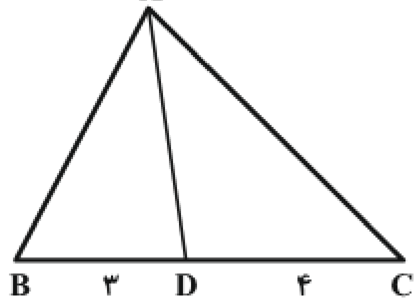
۱) $\sqrt{۱۴}$　　۲) ۴
۳) $۳\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۵}$

⑬ در شکل زیر AD و CO به‌ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی A و C در مثلث ABC هستند. اگر AB = ۹، AC = ۱۲ و CD = ۴ باشد، طول OD کدام است؟



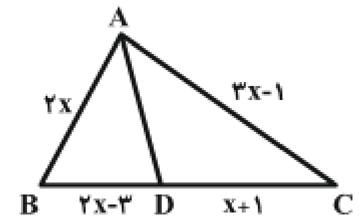
۱) $\sqrt{۶}$　　۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳　　۴) $۲\sqrt{۳}$

⑭ در مثلث شکل زیر، AD نیمساز زاویه داخلی A و AD = AB است. کسینوس زاویه BAD کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

۱۵) در مثلث شکل مقابل، اندازه نیمساز AD کدام است؟



۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

۱۶) در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱، طول یکی از ارتفاع‌ها برابر AH = ۸ است. اگر M، N و P وسط اضلاع باشند، مساحت چهار ضلعی که M، N، P و H رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) ۲۷
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۰

۱۷) در مثلثی با طول اضلاع ۴، ۶ و ۸ واحد، شعاع دایره محاطی داخلی کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

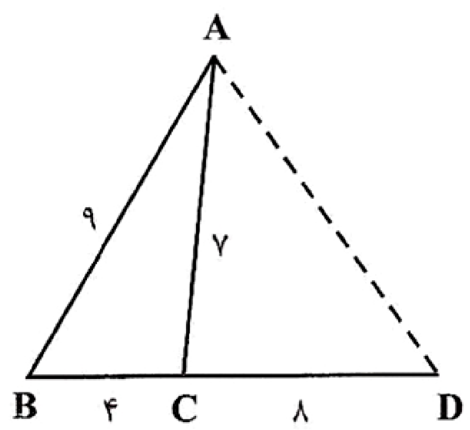
۱۸) مثلث ABC با طول ضلع‌های ۵، ۲۹ و ۳۰ مفروض است. مساحت مجانس این مثلث تحت تجانس به مرکز محل برخورد میانه‌ها و نسبت $k = \frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۲۴
۴) ۳۲

۱۹) در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه $۵\sqrt{۲}$ است. مجموع معکوس‌های دو ضلع زاویه قائمه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$
۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۲۰) در شکل روبه‌رو اندازه پاره خط AD کدام است؟



۱) ۹
۲) $۳\sqrt{۱۰}$
۳) ۱
۴) $۶\sqrt{۳}$

مدت زمان آزمون: –

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آزمون هندسه یازدهم فصل۳ زماندار**

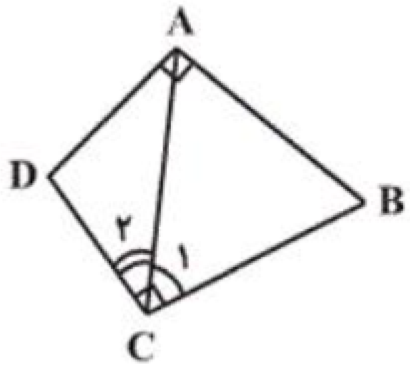
تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵

آکادمی کوچینگ
منصور رخشان

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \hat{B} \Rightarrow \sin\hat{D} = \sin\hat{B} \end{cases}$$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث‌های ABC و ADC داریم:

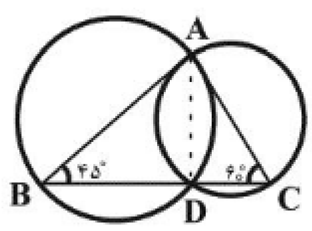
$$\left.\begin{matrix} \overset{\triangle}{ABC} : \dfrac{AB}{\sin\hat{C}_۱} = \dfrac{AC}{\sin\hat{B}} \\ \overset{\triangle}{ADC} : \dfrac{AD}{\sin\hat{C}_۲} = \dfrac{AC}{\sin\hat{D}} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sin\hat{B}=\sin\hat{D}} \dfrac{AB}{\sin\hat{C}_۱} = \dfrac{AD}{\sin\hat{C}_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin\hat{C}_۱} = \frac{AD}{\cos\hat{C}_۱} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{\sin\hat{C}_۱}{\cos\hat{C}_۱} = \tan\hat{C}_۱ = \tan(A\hat{C}B)$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۱

وتر مشترک AD را رسم می‌کنیم. اگر R و R′ شعاع‌های دایره‌های کوچک و بزرگ باشند، با توجه به قضیه سینوس‌ها در دو مثلث ABD و ACD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD} : \frac{AD}{\sin ۴۵^\circ} = ۲R \Rightarrow R = \frac{AD}{۲\sin ۴۵^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{۲}}$$

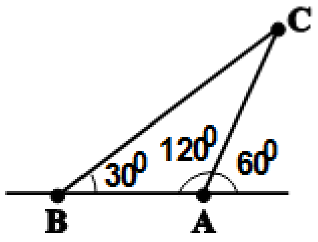
$$\overset{\Delta}{ACD} : \frac{AD}{\sin ۶۰^\circ} = ۲R' \Rightarrow R' = \frac{AD}{۲\sin ۶۰^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^۲}{\pi R'^۲} = \left(\frac{R}{R'}\right)^۲ = \left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

خواسته مسأله اندازه BC است. با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AC}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{BC}{\sin ۱۲۰^\circ} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۳}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^{۲} = ۳^{۲} + ۸^{۲} - ۲(۳)(۸)\cos ۶۰ = ۹ + ۶۴ - ۴۸(\tfrac{۱}{۲}) = ۴۹ \Rightarrow BC = ۷$$

طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin ۶۰} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{۷}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۸}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۱

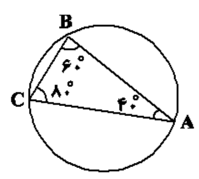
با توجه به رابطه $\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C}}{۴}$ می‌توان اندازه زاویه‌های مثلث را مشخص کرد.

$$\frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{\widehat{B}}{۳} = \frac{\widehat{C}}{۴} = K \Rightarrow \widehat{A} = ۲K \quad , \quad \widehat{B} = ۳K \quad , \quad \widehat{C} = ۴K$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲K + ۳K + ۴K = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow K = ۲۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۴۰^\circ \\ \hat{B} = ۶۰^\circ \\ \hat{C} = ۸۰^\circ \end{cases}$$

با توجه به قضیه سینوس ها، اندازه شعاع دایره محیطی این مثلث را به دست می آوریم.



$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = ۲R$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\sin ۶۰^\circ} = ۲R \Rightarrow R = ۱$$

سوال ۶

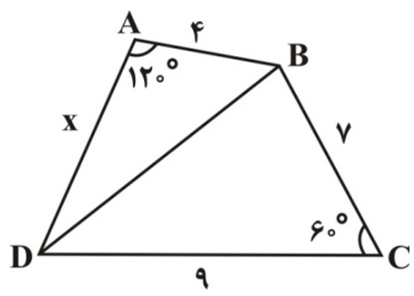
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چهار ضلعی ABCD محاطی است پس داریم:

$\hat{A} = ۱۸۰° - \hat{C}$

$= ۱۸۰° - ۶۰° = ۱۲۰°$



طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$BD^۲ = BC^۲ + DC^۲ - ۲BC \times DC \times \cos\hat{C}$

$\Rightarrow ۶۷ = ۱۶ + x^۲ - ۲ \times ۴ \times x \times (-\frac{۱}{۲})$

$\Rightarrow x^۲ + ۴x - ۵۱ = ۰$

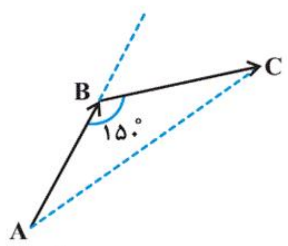
$x = \frac{-۴\pm\sqrt{۲۲۰}}{۲} = \frac{-۴\pm۲\sqrt{۵۵}}{۲} = -۲ \pm \sqrt{۵۵}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -۲ + \sqrt{۵۵} \Rightarrow x + ۲ = \sqrt{۵۵} \\ x = -۲ - \sqrt{۵۵} \end{cases}$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا طول مسافت طی شده را در هر یک از دو مرحله حرکت محاسبه می‌کنیم.



$\overline{AB} = V_۱ t_۱ = ۳/۶ \times ۵ = ۱۸$

$\overline{BC} = v_۲ t_۲ = ۲ \times ۶ = ۱۲$

$\overline{AC}^۲ = (۱۸)^۲ + (۱۲)^۲ - ۲(۱۸)(۱۲)\cos ۱۵۰°$

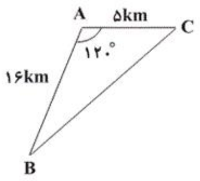
$= (۶)^۲[۹ + ۴ - ۲ \times ۳ \times ۲ \times (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})]$

$= (۶)^۲[۱۳ + ۶\sqrt{۳}] \Rightarrow \overline{AC} = ۶\sqrt{۱۳ + ۶\sqrt{۳}}$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

۲۰ دقیقه معادل $\frac{۱}{۳}$ ساعت است و دو موتورسوار بعد از گذشت این زمان در فاصله‌های $AC = ۱۵ \times \frac{۱}{۳} = ۵\,km$ و $AB = ۴۸ \times \frac{۱}{۳} = ۱۶\,km$ از نقطه شروع یعنی A قرار دارند. با توجه به شکل و قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} - ۲AC \times \cos ۱۲۰^{\circ}$$
$$\Rightarrow BC^{۲} = ۵^{۲} + ۱۶^{۲} - ۲ \times ۵ \times ۱۶ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۳۶۱$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{۳۶۱} = ۱۹km$$

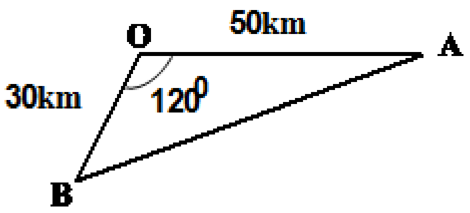
سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مسافت طی شده، توسط هر قایق را محاسبه می‌کنیم:

$OA = ۱۰۰ \times ۰/۵ = ۵۰\,km \quad , \quad OB = ۶۰ \times ۰/۵ = ۳۰km$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} - ۲OA \times OB \times \cos ۱۲۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow AB^{۲} = ۲۵۰۰ + ۹۰۰ - ۲ \times ۵۰ \times ۳۰ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۴۹۰۰$$

$$\Rightarrow AB = ۷۰km$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

اگر در مثلث ABC رابطه میانه‌ها را برای هر یک از میانه‌های m_a، m_b و m_c بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^{۲} + ۲c^{۲} - a^{۲}} \Rightarrow m_a^{۲} = \frac{۱}{۴}(۲b^{۲} + ۲c^{۲} - a^{۲}) \\ m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^{۲} + ۲c^{۲} - b^{۲}} \Rightarrow m_b^{۲} = \frac{۱}{۴}(۲a^{۲} + ۲c^{۲} - b^{۲}) \\ m_c = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^{۲} + ۲a^{۲} - c^{۲}} \Rightarrow m_c^{۲} = \frac{۱}{۴}(۲b^{۲} + ۲a^{۲} - c^{۲}) \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} m_a^{۲} + m_b^{۲} + m_c^{۲} = \frac{۳}{۴}(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})$$
$$\Rightarrow (۴)^{۲} + (۵)^{۲} + (۷)^{۲} = \frac{۳}{۴}(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})$$
$$\Rightarrow a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = \frac{۴}{۳}(۹۰) = ۱۲۰$$

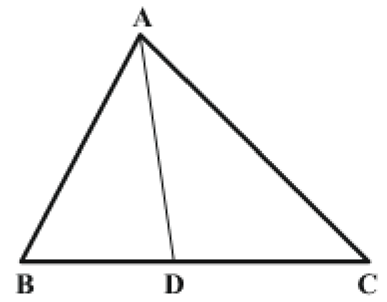
سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

طول نیمساز زاویه داخلی در مثلث ABC برابر است با:

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC$$

از طرفی طبق فرض سؤال، $AD^{۲} = AB \times AC - ۴۸$ است، پس $BD \times DC = ۴۸$. از طرفی داریم:



$$BC = ۱۴ \Rightarrow BD + DC = ۱۴ \Rightarrow BD + \frac{۴۸}{BD} = ۱۴$$

$$\Rightarrow BD^{۲} - ۱۴BD + ۴۸ = ۰ \Rightarrow (BD - ۶)(BD - ۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BD = ۶ \\ BD = ۸ \end{cases}$$

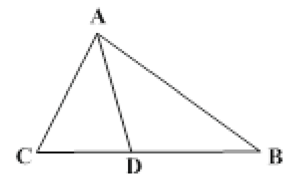
با فرض $BD < DC$، $BD = ۶$ و در نتیجه $DC = ۸$ است و در نتیجه طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»



طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۸}{۴} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BD+CD}_{BC}} = \frac{۲}{۲+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow BD = ۶\ ,\ CD = ۳$$

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times CD = ۸ \times ۴ - ۶ \times ۳ = ۳۲ - ۱۸$$

$$\Rightarrow AD^{۲} = ۱۴ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۴}$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۱

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\text{نیمساز زاویه داخلی A} \quad AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{۴} = \frac{۹}{۱۲} \Rightarrow BD = ۳$$

طول نیمساز AD از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC = ۹ \times ۱۲ - ۳ \times ۴ \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۶}$$

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ADC داریم:

$$\text{نیمساز زاویه داخلی C} \quad CO \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OD}{AD} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{OD}{۴\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow OD = \sqrt{۶}$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید $AD = AB = x$ باشد. طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{x}{AC} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow AC = \frac{۴}{۳}x$$

از طرفی طبق رابطه طول نیمساز زاویه داخلی در این مثلث داریم:

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow x^{۲} = x \times \frac{۴}{۳}x - ۳ \times ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}x^{۲} = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

حال با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} - ۲AB \times AD \times \cos B\hat{A}D$$

$$\Rightarrow ۹ = ۳۶ + ۳۶ - ۲ \times ۶ \times ۶ \times \cos B\hat{A}D$$

$$\Rightarrow ۷۲ \cos B\hat{A}D = ۶۳ \Rightarrow \cos B\hat{A}D = \frac{۶۳}{۷۲} = \frac{۷}{۸}$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱} = \frac{۲x}{۳x-۱}$$

$$\Rightarrow (۲x-۳)(۳x-۱) = ۲x(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۶x^۲ - ۲x - ۹x + ۳ = ۲x^۲ + ۲x$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۳\pm۱۱}{۸}$$

$$\begin{cases} x = ۳ \\ x = \frac{۱}{۴} \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

طبق رابطه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

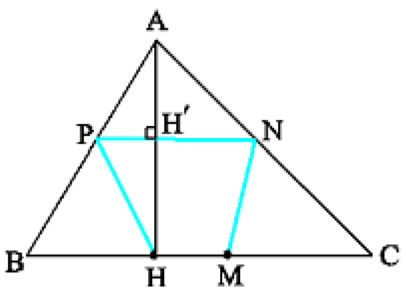
$$AD^۲ = AB \times AC - BD \times DC$$
$$= ۶ \times ۸ - ۳ \times ۴ = ۳۶ \Rightarrow AD = ۶$$

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا قضیه هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.



$$P = \frac{۱۰+۱۷+۲۱}{۲} = ۲۴$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۲۴ \times ۳ \times ۷ \times ۱۴} = ۸۴$$

با توجه به اینکه $۸۴ = ۲۱ \times ۸ \times \frac{۱}{۲}$، پس ارتفاع AH بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث (به طول ۲۱) وارد می‌شود. با فرض AB = ۱۰، AC = ۱۷ و BC = ۲۱ داریم:

$$NP = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲} \times ۲۱ = ۱۰/۵$$

$$HH' = \frac{۱}{۲}AH = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$

$$A\overset{\triangle}{H}B : BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow BH = ۶$$

$$MH = BM - BH = ۱۰/۵ - ۶ = ۴/۵$$

$$S_{PNMH} = \frac{۱}{۲}HH'(NP + MH) = \frac{۱}{۲} \times ۴(۱۰/۵ + ۴/۵) = ۳۰$$

سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

اگر S مساحت و P نصف محیط این مثلث باشد، آن‌گاه طبق قضیه هرون داریم: $P = \frac{۴+۶+۸}{۲} = ۹$

$$S = \sqrt{۹(۹-۴)(۹-۶)(۹-۸)} = \sqrt{۹\times۵\times۳\times۱} = ۳\sqrt{۱۵}$$

$$\text{شعاع دایره محاطی داخلی} : r = \frac{S}{P} = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۹} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۱

دو مثلث متجانس همواره متشابه‌اند و نسبت تشابه همان نسبت تجانس است. اگر مساحت مجانس مثلث ABC در این تجانس، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ باشد، داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow S' = \frac{۱}{۹} \quad (*)$$

حال برای محاسبه مساحت مثلث ABC از قضیه هرون کمک می‌گیریم:

$$P = \frac{۵+۲۹+۳۰}{۲} = ۳۲$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$
$$= \sqrt{۳۲(۳۲-۵)(۳۲-۲۹)(۳۲-۳۰)} = ۷۲$$

$$\xrightarrow{(*)} S' = \frac{۱}{۹}S = \frac{۷۲}{۹} = ۸$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم طول نیمساز داخلی AD در مثلث ABC از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AD = \frac{۲bc\ \cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}$$

پس اگر $AD = ۵\sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ، داریم:

$$۵\sqrt{۲} = \frac{۲bc\ \cos ۴۵^\circ}{b+c} \Rightarrow ۵\sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}bc}{b+c} \Rightarrow \frac{b+c}{bc} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۱}{۵}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق قضیه استوارت در مثلث ABD داریم:

$$AB^{۲} \times CD + AD^{۲} \times BC = AC^{۲} \times BD + BC \times CD \times BD$$

$$\Rightarrow ۸۱ \times ۸ + AD^{۲} \times ۴ = ۴۹ \times ۱۲ + ۴ \times ۸ \times ۱۲$$

$$\Rightarrow ۸۱ \times ۸ + ۴AD^{۲} = ۱۲(۴۹ + ۳۲) = ۱۲ \times ۸۱$$

$$\Rightarrow ۴AD^{۲} = ۸۱(۱۲ - ۸) = ۸۱ \times ۴ \Rightarrow AD^{۲} = ۸۱ \Rightarrow AD = ۹$$